Test di Prova 3/11/08

① Siano $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ continue e siano
$f(0) = f(2) + 1$; $g(0) = g(2) - 2$.
Quali delle seguenti affermazioni seguono necessariamente dalle ipotesi?

(i) f è decrescente.

(ii) g ha un punto di massimo in $[0,2]$

(iii) $\exists\, x \in (0,2)$: $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) + \frac{1}{2}$

(iv) $\exists\, x \in (0,2)$: $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) - \frac{1}{2}$

[+2 punti per una risposta corretta,
 −2 punti per una risposta errata].

<u>Nota</u>. Due risposte sono corrette, due errate.

② Calcolare uno dei seguenti limiti.

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n!\cdot 3^n + (n+2)!\cdot 2^n}{5\cdot(n-2)!\,(n^2-1)\cdot 3^n + 7\cdot n!\cdot 2^n}$$

(ii) $$\lim_{x\to 1} e^x \cdot \frac{\log(3x-2) + 2x - 2}{5x-5}$$

③ Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile su $\mathbb{R}$, e sia
$f : \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \to \mathbb{R}$ definita da

(*) $f(x) = h\left(2\cdot \mathrm{tg}(3x) + 1\right)$.

Sapendo che $h'(1) = \frac{\pi}{12}$ e $h'(3) = e$,
calcolare $f'(0)$.

FACOLTATIVO. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile su $\mathbb{R}$ e si supponga che $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$:

$$h(2 \cdot tg(3x) + 1) = x^2 + 5x$$

Calcolare $h'(1)$.

(4) ~~Scrivere il grafi~~ Disegnare il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

f è continua in $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$;

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +1$;

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$;

f ha un punto di minimo in $x = 2$.

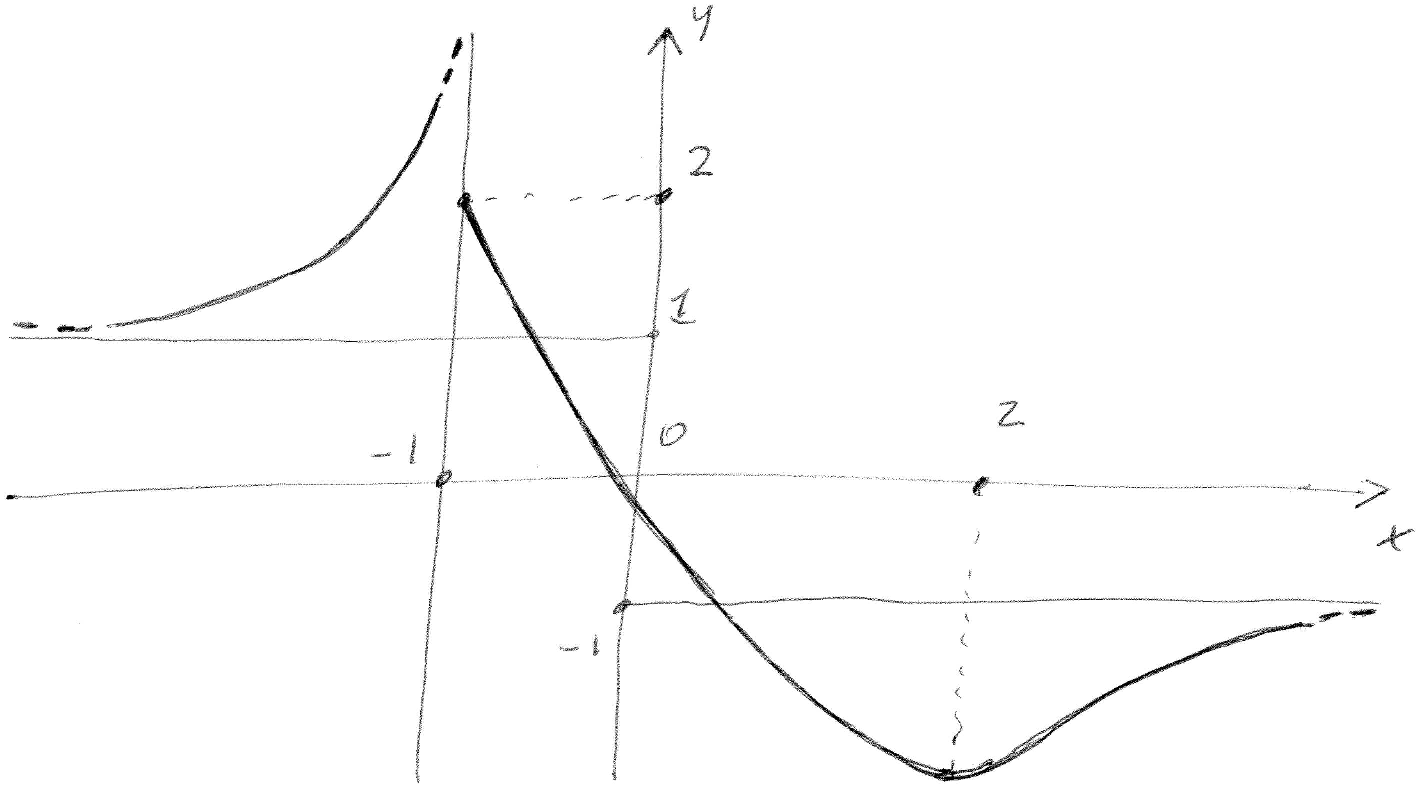
Soluzioni.

(1) (ii) e (iii)

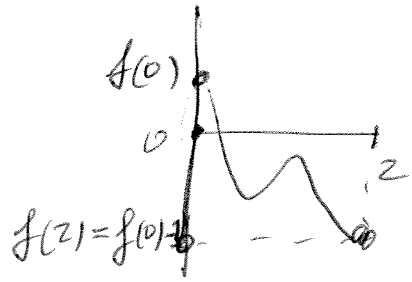
(2) (i): $\frac{3}{5}$; (ii) e

(3) $\frac{\pi}{2} = f'(0)$. FAC. $h'(1) = \frac{5}{6}$

(4) Per esempio:



① (i) non è necessariamente vera:



(ii) g ha un punto di massimo in $[0,2]$ per T. di Weierstrass. Poiché ~~$g(2) - g(2) > g(0)$~~ $g(0) = g(2) - 2 < g(2)$, $x = 0$ non è p.to di massimo: ogni p.to di massimo sta in $(0,2]$.

(iii) Pongo $h(x) = f(x) + g(x) - f(0) - g(0) - \frac{1}{2}$:
h è continua;
$h(0) = -\frac{1}{2} < 0$ e

$$h(2) = f(2) + g(2) - f(0) - g(0) - \frac{1}{2}$$
$$= f(0) - 1 + g(0) + 2 - f(0) + g(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Per il T.o degli zeri, esiste $x \in (0,2)$ t.c. $h(x) = 0$; cioè: $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) + \frac{1}{2}$

(iv) Pongo $k(x) = f(x) + g(x) - f(0) - g(0) + \frac{1}{2}$:
k è continua; $k(0) = \frac{1}{2}$;
$k(2) = \frac{3}{2}$: il Teorema degli zeri non si applica.

Un esempio che mostra come (iv) possa non valere è: $f(x) = -\frac{x}{2}$; $g(x) = x$;

$$f(x) + g(x) = \frac{x}{2} \neq -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + f(0) + g(0) \quad \forall x \in [0,2].$$

(2) (i) $\dfrac{3\cdot n!\cdot 3^n + (n+2)!\cdot 2^n}{5\cdot (n-2)!\cdot (n^2-1)\cdot 3^n + 7\cdot n!\cdot 2^n} =$

$= \dfrac{3\cdot n!\cdot 3^n + (n+2)\cdot(n+1)\cdot n!\cdot 2^n}{5\cdot n!\cdot 3^n\cdot \dfrac{n^2-1}{n\cdot(n-1)} + 7\cdot n!\cdot 2^n}$

[usando $(n-2)! = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{n\cdot(n-1)} = \dfrac{n!}{n\cdot(n-1)}$]

$= \dfrac{\cancel{n!\cdot 3^n}}{\cancel{n!\cdot 3^n}} \cdot \dfrac{3 + (n+2)\cdot(n+1)\cdot \dfrac{2^n}{3^n}}{5\cdot \dfrac{n^2-1}{n^2-n} + 7\cdot \dfrac{2^n}{3^n}}$

[usiamo ora: $\dfrac{n^2-1}{n^2-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ e

$(n+2)\cdot(n+1)\cdot\dfrac{2^n}{3^n} = \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ perché $\frac{3}{2}>1$]

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3}{5}$

(ii) Pongo $x = y+1$; $x\to 1 \iff y\to 0$:

$\lim_{x\to 1} e^x\cdot \dfrac{\log(3x-2)+2x-2}{5x-5} =$

$= \lim_{y\to 0} e^{1+y}\cdot \dfrac{\log(3y+3-2)+2y+2-2}{5y+5-5}$

$= e\cdot \lim_{y\to 0} \dfrac{\log(1+3y)+2y}{5y}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\log(1+3y)}{3y} + \lim_{y \to 0} \frac{2\cancel{y}}{5\cancel{y}}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

(3) $f'(x) = h'(2 \cdot tg(3x) + 1) \cdot 2 \cdot (1 + tg^2(3x)) \cdot 3$

$$\Rightarrow f'(0) = h'(1) \cdot 6 = \frac{\pi}{12} \cdot 6 = \frac{\pi}{2}.$$

FAC. Dalle ipotesi, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$:

$$h'(2 \cdot tg(3x) + 1) \cdot 2 \cdot (1 + tg^2(3x)) \cdot 3 = h'(x)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2 + 5x) = 2x + 5.$$

Ponendo $x = 0$,

$$6 \cdot h'(1) = 5, \text{ quindi } h'(1) = \frac{5}{6}.$$

(4) Guardare le definizioni.