

Prova Scritta del II appello di Analisi Matematica
LS
Ingegneria Civile

Nicola Arcozzi

16 giugno 2008

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 12 punti.

Nella soluzione degli esercizi riportate i calcoli e le motivazioni.

Esercizio 1.[5 pt.] Risolvere il seguente problema di Dirichlet nel disco $B = B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B, \\ u(x, y) = (x^2 + y^2 + 2y)^2 \text{ su } \partial B. \end{cases}$$

Esercizio 2.[8 pt.] Calcolare \hat{f} , dove la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è definita da

$$f(x) = e^{-|x|} \cos(x).$$

Esercizio 3.[4 pt.] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare ordinaria del II ordine:

$$x'' + x = e^{t^2}.$$

Esercizio 4.[7 pt.] Sia $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = \cos^2(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Trovare coefficienti c_n (n intero, $n \geq 1$) tali che l'uguaglianza

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \sin(nx)$$

valga su $[0, \pi]$ nel senso L^2 . [Motivare i passaggi].

Risolvere quindi il seguente problema misto:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Esercizio 5.[6 pt.] Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_y - 2u_x + 2u = e^{-|x+2y|} \\ u(x, 0) = h(x). \end{cases}$$