

PROVA SCRITTA DI ANALISI L-A,
III APPELLO
C.d.L. in Ingegneria Edile e Tecnico del
Territorio, sede di Ravenna

12 gennaio 2005

Nome e Cognome (in stampatello).....

Corso di Laurea: (i) Ingegneria Edile, (ii) Tecnico del Territorio.

Segnare con una croce il corso di laurea a cui è iscritto il candidato.

Esercizi della prova scritta. Tempo per la prova: 2 ore.

(1) [4 punti] Sia γ la circonferenza di raggio 2 e centro in $(-2, 1)$. Scrivere l'equazione di γ e trovare le equazioni delle rette l passanti per $(0, 0)$ e tangenti a γ .

Disegnare γ e le rette l sul piano cartesiano.

(2) [4 punti] Trovare le soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \sqrt{2x-2} \leq \sqrt{x^2-1} \\ \log_2(x) \leq 1 \end{cases}$$

(3) [3 punti] Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Una sola delle seguenti affermazioni è certamente vera per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quale?

(i) $a^{\log_a(a^x)} \cdot a^{\log_a(a^{x^2})} = a^{x^3}$.

(ii) $a^{\log_a(a^x)} \cdot a^{\log_a(a^{x^2})} = x^3$.

(iii) $a^{\log_a(a^x)} \cdot a^{\log_a(a^{x^2})} = a^{x(1-x)}$.

(iv) $a^{\log_a(a^x)} \cdot a^{\log_a(a^{x^2})} = x(1-x)$.

(4) [4 punti] Quale delle seguenti famiglie di vettori in \mathbb{R}^3 è una base per \mathbb{R}^3 ?

(1) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)$.

(2) $(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$.

(3) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$.

(4) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)$.

(5) [4 punti] Sia

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{1}{n^2}}{n^2 + \frac{1}{2n}}$$

Allora, $L =$

- (i) 0
- (ii) $+\infty$
- (iii) 2
- (iv) 4

(6) [4 punti] Siano $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue, $f(0) = 2$, $f(1) = 2$, $g(0) = -1$, $g(1) = 1$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

- (i) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f(x) + g(x) = 0$.
- (ii) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f(x) - g(x) = 0$.
- (iii) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f(x)g(x) = 0$.
- (iv) Esiste x in $[0, 1]$ tale che $f'(x) = 0$.

(7) [3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto \mathbb{R} . Sia

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)^2}$$

Quali delle seguenti è la derivata di f ?

- (i) $h'(x) = \frac{1-f(x)^2}{(1+f(x)^2)^2} \cdot f'(x)$.
- (ii) $h'(x) = \frac{f'(x)}{2f(x)f'(x)}$.
- (iii) $h'(x) = \frac{f'(x)+f'(x)f(x)^2-2f'(x)f(x)}{(1+f(x)^2)^2}$.
- (iv) $h'(x) = \frac{1-f(x)^2}{(1+f(x)^2)^2}$.

(8) [4 punti] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x + 1}{1 + (x + 1)^2}$$

(a) Trovare gli intervalli su cui f è crescente.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

(c) Trovare gli intervalli su cui $f > 0$ e disegnare sommariamente il grafico di f .

(9) [3 punti] **Esercizio facoltativo.** Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)x}{(1 - \cos(2x)) \log(1 - 3x)},$$

mostrando il procedimento utilizzato in dettaglio e mettendo in evidenza i teoremi utilizzati.

[100]