Capacità d'insiemi: diadica e non

Nicola Arcozzi

Università di Bologna

15/09/2011

N.A., R. Rochberg, E. Sawyer, B. Wick

Potential Theory on Trees, Graphs
and Ahlfors regular metric spaces,

http://arxiv.org/abs/1010.4788

Capacità in $\mathbb{R}^n$

Dati: $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$.
(Solo $1/p' \leq s < 1$ è interessante, $s = 1/p'$ lo è particolarmente).

Nucleo di Riesz-Bessel

Riesz: $K(x,y) = |x-y|^{-ns}$, Bessel: decadimento esponenziale a ∞.

$\mu \geq 0$: misura su $\mathbb{R}^n$.

Energia

$\mathcal{E}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)d\mu(y)\right)^{p'} dx.$

$E \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso.

Capacità

$\mathrm{Cap}(E) = \inf_{\mathrm{supp}(\mu)\subseteq E} \frac{\mu(E)^p}{\mathcal{E}(\mu)^{p-1}}$

Capacità in spazi metrici (Ahlfors-regolari)

Dati: (X, ρ), $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$, $m = \mathcal{H}^Q$: misura di Hausdorff Q-dim.

Ahlfors regolarità

$m(B(x, r)) \approx r^Q$.

Suppongo anche (i) $\operatorname{diam}(X) \approx 1$; (ii) (X, ρ) completo.

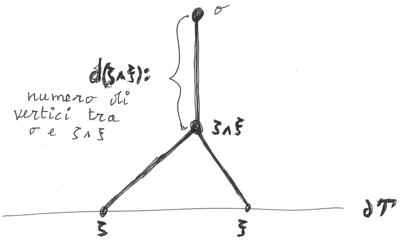
- $K(x, y) = \rho(x, y)^{-sQ}$.
- $\mathcal{E}_X(\mu) = \int_X \left(\int_X K(x, y) d\mu(y)\right)^{p'} dx$.
- $\operatorname{Cap}_X(E) = \inf_{\operatorname{supp}(\mu) \subseteq E} \frac{\mu(E)^p}{\mathcal{E}(\mu)^{p-1}}$.

- L'ipotesi (i) s'aggira imponendo decadimento a ∞ al nucleo K.
- L'ipotesi (ii) è comoda, probabilmente non necessaria.

Esempio: bordo di un albero

- T albero con radice o
- ∂T: bordo di T
- $\rho_T(\zeta, \xi) = 2^{-d(\zeta \wedge \xi)}$: $(\partial T, \rho_T)$ è uno spazio metrico.
- $(\partial T, \rho_T)$ è Q-regolare se e solo se

$$\sharp\{y \in T : \ d(x, y) = k\} \approx 2^{Qk}$$



Discretizzabilità

Teorema

A (X, ρ) Ahlfors Q-regolare posso associare T e $\Lambda : \partial T \to X$ Lipschitz:

- $(\partial T, \rho_T)$ è Ahlfors Q-regolare
- $\mathrm{Cap}_X(\Lambda(F)) \approx \mathrm{Cap}_{\partial T}(F)$ se F è chiuso in ∂T
- $\mathrm{Cap}_X(E) \approx \mathrm{Cap}_{\partial T}(\Lambda^{-1}(E))$ se E è chiuso in X

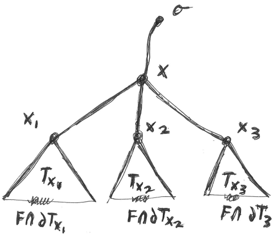
- $X = \mathbb{R}$, $p = 2$, $s = 1/2$: Benjamini e Peres (1992)
- $X = \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $s = 1/p'$: implicito in Verbitsky e Wheeden (1998)
- $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: nuovo

A che pro?

- Figli di x in T: $x_1, \dots, x_k$
- T_{x_j}: sottoalbero di T avente radice x_j

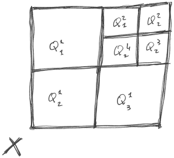
Formula ricorsiva

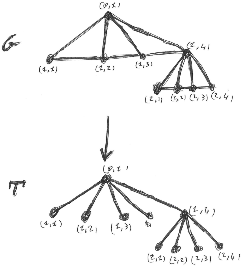
$$\mathrm{Cap}_{T_x}(F) = \frac{\sum_j \mathrm{Cap}_{T_{x_j}}(F \cap \partial T_j)}{\left[1 + m(\partial T_x)^{1-sp'} \left(\sum_j \mathrm{Cap}_{T_{x_j}}(F \cap \partial T_j)\right)^{p'-1}\right]^{p-1}}$$



Costruzione di T e G

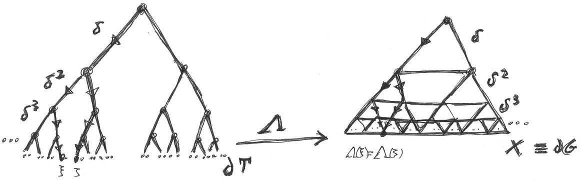
- M. Christ: $X = \sqcup_j Q_{\alpha_j^N}$ con $Q_{\alpha_j^N} \approx B(x_{\alpha_j^N}, 2^{-N})$
- $T = \{\alpha_j^N : \ N \geq 0, \ 1 \leq j \leq k_N\}$ è l'albero (ordine=inclusione)
- Grafo: $\alpha_l^N \sim_G \alpha_{l'}^{N'}$ se (i) $\alpha_l^N \sim_T \alpha_{l'}^{N'}$ o se (ii) $N = N'$ e $\rho(Q_{\alpha_l^N}, Q_{\alpha_{l'}^N}) \leq \delta^N$
- $X \equiv \partial G$ in una maniera "ovvia".



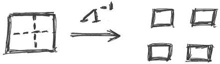


Costruzione di Λ

$$\Lambda : \partial T \ni \zeta = \{\alpha^N_{I_N} : \ N \geq 0\} \mapsto \cap_{N\geq 0}\overline{Q_{\alpha^N_{I_N}}} \in X,\ \delta = 1/2$$



Λ^{-1} disconnette radicalmente X



Problema: Λ non è iniettiva su insiemi di capacità non nulla.

I ingrediente: spostare misure attraverso Λ

Lemma

- Se A è Borel in ∂T, allora $\Lambda(A)$ è Borel in X.
- Ogni A di Borel in ∂T può essere scomposto $A = \sqcup A_j$ dove (i) ciascun A_j è di Borel e (ii) Λ è $1-1$ su A_j.

Corollario

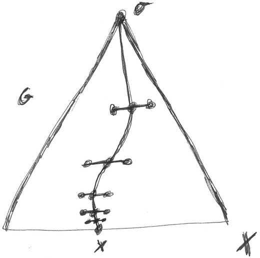
μ: misura su X. È ben definita la misura $\Lambda^*\mu$ su ∂T:

$$\Lambda^*\mu(A) = \int_X \frac{\sharp(\Lambda^{-1}(\{x\} \cap A))}{\sharp(\Lambda^{-1}(\{x\}))} d\mu(x).$$

Strategia generale

- $\mathcal{E}_{\partial T}(\Lambda^*\mu) \approx \mathcal{E}_X(\mu)$ se μ è di Borel in ∂T
- $\mathcal{E}_{\partial T}(\nu) \approx \mathcal{E}_X(\Lambda_*\nu)$ se ν è di Borel in X
- $\|\mu\| \approx \|\Lambda^*\mu\|$ se μ è di Borel in ∂T
- $\|\nu\| = \|\Lambda_*\nu\|$ se ν è di Borel in X
- I supporti delle misure variano come si deve attraverso Λ^* e Λ_*.

Il Teorema segue dalla definizione di capacità. I primi due punti richiedono uno strumento ulteriore.



$$P_G(x) = \{\alpha \in G : d_G(\alpha, P(x)) \le 1\}$$

$$P(x) = \{\alpha \in G : x \in \overline{Q_\alpha}\}$$

II ingrediente: disuguaglianza di Muckenhoupt-Wheeden e Wolff

Teorema di Muckenhoupt-Wheeden (1974) e Wolff (1983)

$$\int_X \left(\sum_{\alpha \in P_G(x)} \frac{\omega(Q_\alpha)}{m(Q_\alpha)^s} \right)^{p'} dx \lesssim \int_X \sum_{\alpha \in P_G(x)} \left(\frac{\omega(Q_\alpha)}{m(Q_\alpha)^s} \right)^{p'} dx$$

$$\lesssim \int_X \sup_{\alpha \in P_G(x)} \left(\frac{\omega(Q_\alpha)}{m(Q_\alpha)^s} \right)^{p'} dx$$

A che serve?

- Il termine a sinistra è confrontabile con $\mathcal{E}_X(\mu)$.
- Il termine intermedio è l'energia per un nucleo K', ed è facile vedere che l'energia del corrispondente nucleo su ∂T è ad essa equivalente.
- Seguono quindi le equivalenze di energia desiderate: $\mathcal{E}_{\partial T}(\Lambda^* \mu) \approx \mathcal{E}_X(\mu)$ e $\mathcal{E}_{\partial T}(\nu) \approx \mathcal{E}_X(\Lambda_* \nu)$.

grazie per l'attenzione

Pala di Amico Aspertini in S. Martino Maggiore a Bologna