

Disequazioni

D. Barbieri

October 7, 2013

1 Esercizi

Esercizio 1

$$x^2 > 1 - |x|$$

Esercizio 2

$$\log(x^2 + |x + 3| - 8) > 0$$

Esercizio 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(x + \frac{\pi}{13}) - \cos(x + \frac{\pi}{13}) > 0 \\ -\frac{12\pi}{26} < x < \frac{12\pi}{26} \end{array} \right.$$

Esercizio 4

$$\cosh(7x + 4) \geq \frac{1}{2} \left(e^{|7x+4|} + \frac{1}{2} \right)$$

Esercizio 5

$$\frac{2|y|}{y(y^2 + 1)} + \frac{d}{dy} (|y| \ln(y^2 + 1)) > 0$$

2 Soluzioni

Esercizio 1

La funzione $f(x) = x^2 + |x| - 1$ è pari: $f(x) = f(-x)$, dunque è sufficiente risolvere per x positivo.

$$x^2 + x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$$

perciò scegliendo le soluzioni positive e simmetrizzando si ha

$$x^2 + |x| - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty, \frac{+1 - \sqrt{5}}{2} \right[\cup \left] \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$$

Esercizio 2

Affinché la funzione logaritmo sia positiva, il suo argomento deve essere > 1 :

$$x^2 + |x + 3| - 8 > 1.$$

Possiamo risolvere questa disequazione con l'aiuto della funzione segno, indicata con $\sigma(x)$:

$$x^2 + |x + 3| - 8 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 9 + |x + 3| > 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3 + \sigma(x + 3)) > 0$$

che è dunque verificata quando $x < -3$ e quando $x > 2$. Infatti il primo fattore è positivo per $x > -3$, e in quella regione la positività del secondo richiede $x > 2$. Per $x < -3$, invece, entrambi i fattori sono negativi.

Esercizio 3

Quando vale la seconda disequazione, si ha che $\cos(x + \frac{\pi}{13})$ è sempre > 0 , dunque è possibile dividere per $\cos$ e riscrivere la prima disequazione come

$$\tan(x + \frac{\pi}{13}) > 0.$$

Poiché sappiamo che, per $y \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si ha che $\tan y > 0$ quando $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan(x + \frac{\pi}{13}) > 0 \\ -\frac{12\pi}{26} < x < \frac{12\pi}{26} \end{array} \right. \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{13} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow x \in] - \frac{\pi}{13}, \frac{12\pi}{26}[.$$

Esercizio 4

Dalla definizione di coseno iperbolico, poiché $\cosh(x) = \cosh(|x|)$, la disequazione è della forma

$$e^y + e^{-y} \geq e^y + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^y \leq 2 \Leftrightarrow y \leq \ln(2)$$

con $y = |7x + 4|$.

Esercizio 5

L'espressione non è definita per $y = 0$, che dunque va escluso dai possibili risultati. Svolgiamo la derivata, facendo uso della funzione segno $\sigma(y)$:

$$\frac{d}{dy} (|y| \ln(y^2 + 1)) = \sigma(y) \ln(y^2 + 1) + \frac{|y|2y}{y^2 + 1}.$$

Il primo termine può anch'esso venir scritto utilizzando la funzione segno

$$\frac{2|y|}{y(y^2 + 1)} = \frac{2\sigma(y)}{(y^2 + 1)}$$

dunque il problema originario può essere riscritto nella forma

$$\frac{2\sigma(y)}{(y^2 + 1)} + \sigma(y) \ln(y^2 + 1) + \frac{|y|2y}{y^2 + 1} > 0, \quad y \neq 0.$$

Raccogliendo $\sigma(y)$ a fattor comune, si ottiene

$$\sigma(y) (\ln(y^2 + 1) + 2) > 0, \quad y \neq 0$$

che è verificata per ogni $y > 0$.