Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **4**

ARGOMENTO: Estremi di insiemi numerici.

(LEZIONE N. 4)

ATTIVITA' N. 1:

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := [1;4[$.

L'insieme A è infinito, dato che è costituito da tutti i numeri reali x tali che $1 \le x < 4$; è limitato (superiormente ed inferiormente) perché ovviamente ammette maggioranti e minoranti. Il numero 4 è il più piccolo dei maggioranti, quindi sup A = 4. Poiché 4 non appartiene ad A, l'insieme A non è dotato di massimo.

Il numero 1 è il più grande dei minoranti, quindi inf A = 1; dato però che 1 appartiene ad A, è min A = 1.

ATTIVITA' N. 2:

Determinare estremo superiore ed inferiore di $A := [1;4[\cap Q$.

L'insieme A è infinito, dato che è costituito da tutti i numeri razionali x tali che $1 \le x < 4$ [1] e ovviamente limitato superiormente ed inferiormente.

E' min A = 1, sup A = 4.

ATTIVITA' N. 3:

Determinare estremo superiore ed inferiore di $A := [1;4[\cap N$.

L'insieme A è costituito dai numeri 1, 2, 3, dunque è finito e limitato. Min A = 1.

L'insieme dei maggioranti di A è costituito dai numeri reali ≥ 3. Il minimo di questo insieme è il numero 3, che appartiene ad A. Dunque max A = 3.

ATTIVITA' N. 4:

Determinare estremo superiore ed inferiore di $A := \left[1;\sqrt{2}\,\right]$.

L'insieme A è infinito e limitato. E' min A = 1, max A = $\sqrt{2}$.

ATTIVITA' N. 5:

Determinare estremo superiore ed inferiore di $A := \left[1;\sqrt{2}\,\right] \cap Q$.

L'insieme A è infinito e limitato. Min A = 1.

E' evidente che $\sqrt{2}$ è il minimo dei maggioranti di A, quindi è l'estremo superiore di A; ma, poiché, come è noto, $\sqrt{2} \notin Q$, A non è dotato di max.

ATTIVITA' N. 6:

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := \{(-1)^n; n \in N\}$.

Si tratta dell'insieme formato dai soli numeri 1 e -1 (valori assunti alternativamente a seconda se n è pari o dispari). Quindi questi numeri sono rispettivamente l'estremo superiore ed inferiore di A. Essendo anche elementi di A, saranno rispettivamente massimo e minimo di A.

---

[1] Si ricordi la proprietà di densità di Q in R: v. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, Corollario 2, pag. 51.

ATTIVITA' N. 7:

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := \{n^2 - n; n \in N^*\}$. [2]

Cominciamo con l'osservare che A è inferiormente limitato: infatti, per tutti i naturali $n \geq 1$ è $n^2 - n \geq 0$, quindi 0 è un minorante di A.

Gli elementi di A assumono valori crescenti all'aumentare del valore di n. [3]

Infatti, considerando n+1, si ha

$$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n, \text{ certo } > n^2 - n, \forall n \in N^*.$$

Il minore degli elementi di A è quindi quello corrispondente al minimo valore di n, cioè $n = 1$; quindi min $A = 0$.

L'insieme A non è limitato superiormente, quindi sup $A = +\infty$.

Infatti A non ha maggioranti: è evidente che l'espressione $n^2 - n = n(n-1)$ può essere resa maggiore di qualsivoglia numero, purché si prenda n sufficientemente "grande".

ATTIVITA' N. 8:

Si dimostri che per l'insieme $A := \{n/m + m/n;\ n, m \in N^*\}$, si ha min $A = 2$, sup $A = +\infty$. [4]

Iniziamo con l'osservare che 2 è minorante di A.

Infatti

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} = \frac{n^2 + m^2}{mn} = \frac{n^2 + m^2 + 2mn - 2mn}{mn} = \frac{(n-m)^2 + 2mn}{mn} = \frac{(n-m)^2}{mn} + 2$$

che è certo $\geq 2, \forall m, n \in N^*$ a causa delle non negatività del primo addendo.

Si può notare che vale il segno di uguaglianza se e solo se $m = n$.

Dunque 2 appartiene ad A ed è quindi il min A.

Se $m = 1$, il corrispondente elemento di A è $n + 1/n$, che è certo $> n, ;\forall n \in N^*$.

Quindi A è superiormente illimitato al pari di N e sup $A = +\infty$.

La disuguaglianza

$$\frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2$$

è equivalente, per la positività di n ed m, a

$$n^2 + m^2 \geq 2mn$$

e può essere giustificata anche con l'osservazione della seguente figura, ove m ed n sono le misure dei lati di un rettangolo, $n^2 + m^2$ è la misura della superficie del quadrato costruito sulla sua diagonale (per il teorema di Pitagora) ed $2mn$ è la misura della doppia area della superficie del rettangolo stesso, che è equivalente alla somma di quattro triangoli rettangoli. Il lettore può facilmente vedere che la regione tratteggiata si annulla quando il rettangolo di partenza è un quadrato (caso $n = m$).

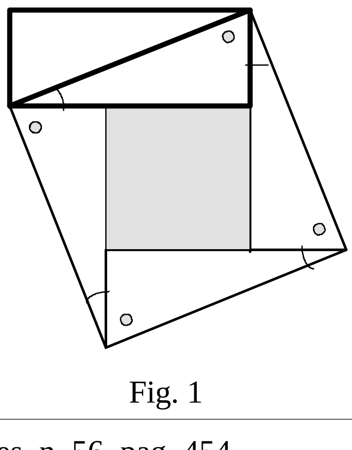


Fig. 1

---

[2] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 56, pag. 454.

[3] In altre parole, l'insieme A è l'*immagine* di una *successione crescente*.

[4] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 1.1-5, pag. 8 ed es. 1.4-7, pag. 35.

ATTIVITA' N. 9:

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := \left\{ \frac{3n+4}{2n+1}; n \in N^* \right\}$. [5]

A è inferiormente limitato; infatti 1 è un minorante di A, dato che il numeratore è maggiore del denominatore per ogni n.

A è superiormente limitato; ad esempio 4 è senz'altro un suo maggiorante.

Infatti, se moltiplichiamo e dividiamo 4 per $2n+1$, si ottiene:

$$4 = \frac{4(2n+1)}{2n+1} = \frac{8n+4}{2n+1} > \frac{3n+4}{2n+1}, \forall n \in N^*.$$

Quindi $1 < a < 4$, $\forall a \in A$; l'insieme A è quindi limitato.

Tuttavia 1 non è certo il massimo dei minoranti di A, né 4 il minimo dei maggioranti di A.

Osserviamo infatti che gli elementi di A assumono valori decrescenti all'aumentare del valore di n. [6]

Sostituendo ad n un valore maggiore, ad esempio $n + 1$, si ottiene una espressione minore della precedente:

$$\frac{3n+4}{2n+1} > \frac{3(n+1)+4}{2(n+1)+1} = \frac{3n+7}{2n+3} \quad .$$

Infatti, poiché per ipotesi $n \geq 1$, i denominatori sono positivi e la precedente relazione è equivalente a

$$(3n+4)(2n+3) > (3n+7)(2n+1)$$

che a sua volta equivale a

$$6n^2 + 9n + 8n + 12 > 6n^2 + 14n + 3n + 7$$

da cui, semplificando, si ottiene la relazione $12 > 7$, certamente vera per ogni n.

Quindi il maggiore di tutti gli elementi di A è quello corrispondente al valore di n più piccolo possibile, cioè 1. Il massimo di A, quindi anche il suo estremo superiore, è dunque:

$$\frac{3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{7}{3}.$$

Prima si era detto che 1 è un minorante di A. Cerchiamo ora di trovarne un altro, maggiore di 1.

$$\frac{3n+4}{2n+1} = \frac{2n+1+n+3}{2n+1} = 1 + \frac{n+3}{2n+1}.$$

D'altra parte

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(n+3)}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{5}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2}.$$

Dunque

$$\frac{3n+4}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4n+2}.$$

Quindi 3/2 è un minorante (maggiore di 1) di A.

Dimostriamo che si tratta proprio dell'estremo inferiore di A.

Qualunque numero reale sia maggiore di 3/2, seppur di "poco", non potrà essere minorante di A; pertanto, $\forall \varepsilon \in R, \varepsilon > 0,$ dovrà esistere (almeno) un $a \in A$ tale che

$$a < \frac{3}{2} + \varepsilon.$$

Infatti:

$$\frac{3n+4}{2n+1} < \frac{3}{2} + \varepsilon$$

---

5 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.* , es. n. 59, pag. 454.

6 in altre parole l'insieme A è l'*immagine* di una *successione decrescente*.

equivale, moltiplicando membro a membro per la quantità positiva $2(2n+1)$, a

$$6n+8<3(2n+1)+2\varepsilon(2n+1),$$

da cui

$$4n\varepsilon>5-2\varepsilon$$

e, finalmente

$$n>\frac{5-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

Quindi, purché n sia maggiore dell'espressione ora trovata, il corrispondente elemento di A sarà minore di $3/2+\varepsilon$, cioè qualunque numero maggiore di 3/2 non può essere un minorante di A. Dunque 3/2 è massimo dei minoranti, vale a dire è $\inf A = 3/2$.

<u>ATTIVITA' N. 10:</u>

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := \left\{\frac{3n+4}{2n+1};\, n\in N\right\}$. [7]

Si tratta sostanzialmente del medesimo insieme preso in considerazione nella precedente Attività. In questo insieme è compreso però anche il valore corrispondente al numero naturale $n = 0$.

Le considerazioni fatte per quell'insieme valgono quindi anche per questo. Poiché si è visto che gli elementi di A assumono valori decrescenti al crescere di n, l'estremo superiore di A, che è anche il suo massimo perché appartiene all'insieme, è il valore corrispondente al più piccolo valore di n, cioè a 0. Dunque $\max A = 4$.

<u>ATTIVITA' N. 11:</u>

Determinare estremo inferiore e superiore di $A := \left\{\frac{n}{m}-\frac{m}{n};\, 0<m<n, \text{con}\, n,\, m\in N^*\right\}$. [8]

Limitiamoci a considerazioni elementari; è evidente che A non ammette maggioranti: supponiamo ad esempio che m sia il più piccolo possibile, cioè 1.

Avremo così $n - 1/n$. All'aumentare del valore di n, l'elemento di A corrispondente sarà dato da un numero sempre più grande, n, a cui viene sottratto un valore sempre più piccolo, $1/n$.

Ad esempio:

$$10-\frac{1}{10}=9,9$$
$$100-\frac{1}{100}=99,99$$
$$1000-\frac{1}{1000}=999,999.$$

Se assegnamo opportuni valori ad n, possiamo rendere l'espressione maggiore di qualunque numero dato. Dunque A non ammette maggioranti e $\sup A=+\infty$.

Mettiamoci ora nella situazione opposta: n ed m il più possibile vicini tra loro, ad esempio, per l'ipotesi $m < n$, sia $n = m + 1$. Avremo:

$$\frac{m+1}{m}-\frac{m}{m+1}=\frac{(m+1)^2-m^2}{m(m+1)}=\frac{2m+1}{m(m+1)}=$$

esprimendo il numeratore della frazione come somma tra $m + 1$ ed m e semplificando:

$$=\frac{m+1}{m(m+1)}+\frac{m}{m(m+1)}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}.$$

---

[7] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 60, pag. 454.

[8] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 65, pag. 454.

Il corrispondente elemento di A potrà così essere espresso come somma di due quantità, $1/m$ ed $1/(m+1)$, che possono essere rese minori di qualunque numero positivo dato. Dunque $\inf A = 0$.

<u>ATTIVITA' N. 12:</u>
Determinare gli estremi inferiore e superiore del seguente insieme: [9]
$A := \{1.c_1 c_2 ... c_n ; n \in N^*\}$, ove ciascuna cifra $c_1, ..., c_n$ può essere solo 0 oppure 1.

Poiché è formato da numeri rappresentati da un allineamento finito di cifre decimali, A è un sottoinsieme dell'insieme Q dei numeri razionali.

Dato che $a \geq 1$, $\forall a \in A$, l'insieme A è inferiormente limitato.

Se le cifre c_k sono tutte nulle, si ottiene 1, che è quindi il minimo di A.

Indicando con A_k il sottoinsieme di A costituito dai numeri con k cifre decimali, avremo:

$$A_1 = \{1.0,\ 1.1\}.$$
$$A_2 = \{1.00,\ 1.01,\ 1.10,\ 1.11\}.$$
$$............$$
$$A_k = \left\{ 1.\underbrace{00...0}_{k}, \ldots\ldots, \underbrace{1.11...1}_{k} \right\}.$$
$$............$$

Ovviamente $\max A_k = 1.\underbrace{11...1}_{k}$.

Tuttavia A non ha massimo: infatti $1.\underbrace{11...1}_{k} < 1.\underbrace{111..1}_{h}$, per ogni $h > k, h, k \in N^*$.

L'estremo superiore di A è il numero razionale (non appartenente ad A) $1.\overline{1} = 10/9$.[10]

<u>ATTIVITA' N. 13:</u>
Esaminare l'insieme $A := \left\{ \frac{n^2+2}{n^2+3} ; n \in N \right\}$, formulando una congettura sui suoi estremi.

Conduciamo una indagine "sperimentale" utilizzando la funzione **vector** di *DERIVE*.
Selezionare **Author** e digitare **vector((n^2+2)/(n^2+3),n,0,100)** <↵>, poi selezionare **Simplify** ed infine **approX**.

Questo comando genera un vettore le cui componenti sono i successivi valori che assume l'espressione che definisce l'insieme al variare di n da 0 a 100.

Si usino i tasti di movimento cursore per esaminare i valori ottenuti.

Appare evidente che si tratta di valori crescenti, al crescere di n [11]. Il min A sembra essere 2/3, mentre gli elementi dell'insieme A vanno man mano avvicinandosi ad 1: l'avvicinamento, molto veloce nei primi valori ottenuti, sembra essere molto lento all'aumentare del valore di n. Ci sono dunque buoni motivi per congetturare che 1 sia il sup A.

Selezionare **Author** e digitare l'espressione **(n^2+2)/(n^2+3)** <↵> (oppure "prelevarla" dalla precedente funzione **vector** con il tasto <**F3**>). Selezionare **Expand**.

---

[9] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, es. n. 1.4-10, pag. 35. Per evitare ambiguità, in questa Attività useremo nelle rappresentazioni decimali il punto invece della virgola.

[10] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, pag. 10 e segg.

[11] In effetti, anche se la nostra indagine è arrivata solo ad $n = 100$, non c'è motivo perché il corrispondente elemento di A non debba comportarsi allo stesso modo anche per valori di n superiori.

L'espressione viene scomposta in *fratti semplici*, cioè espressa nella forma $1-\dfrac{1}{n^2+3}$.

In pratica è come se si fosse aggiunto e tolto 1 al numeratore, per poi esprimere la frazione come somma di due frazioni, la prima delle quali ha il numeratore uguale al denominatore.

Appare subito evidente che gli elementi di *A* saranno tanto più prossimi ad 1, quanto più grande sarà il valore assegnato ad *n*.

ATTIVITA' N. 14:

Determinare estremi inferiore e superiore dell'insieme *A* definito nella precedente Attività.

Gli elementi di *A* sono tutti positivi e costituiti da frazioni proprie, per ogni *n* naturale, quindi l'insieme *A* è limitato.

Dimostriamo che gli elementi di *A* assumono valori crescenti all'aumentare del valore di *n*:

Consideriamo un valore maggiore di *n*, ad esempio *n*+1:

$$\frac{n^2+2}{n^2+3} < \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^2+3} = \frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+4}.$$

Dopo aver osservato la positività dei termini che vi compaiono, consideriamo i reciproci dei due membri; il senso della disuguaglianza dovrà quindi essere invertito ed otterremo così una relazione equivalente:

$$\frac{n^2+3}{n^2+2} > \frac{n^2+2n+4}{n^2+2n+3}.$$

Da cui

$$\frac{(n^2+2)+1}{n^2+2} > \frac{(n^2+2n+3)+1}{n^2+2n+3}$$

che a sua volta equivale a

$$1+\frac{1}{n^2+2} > 1+\frac{1}{n^2+2n+3}$$

da cui, semplificando e considerando ancora i reciproci con l'inversione del senso della disuguaglianza:

$$n^2+2n+3 > n^2+2$$

e infine

$$(n^2+2)+2n+1 > (n^2+2)$$

che è certamente vera per ogni naturale *n*.

Possiamo quindi affermare che il minimo dell'insieme *A* è il valore corrispondente al più piccolo valore di *n*: per *n* = 0 si ottiene 2/3.

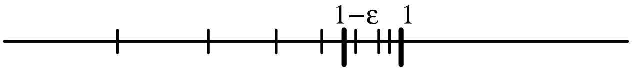
Poiché, come si è detto, tutti gli elementi di *A* sono frazioni proprie, 1 è un maggiorante di *A* e ovviamente non appartiene ad esso poiché per nessun valore di *n* la frazione che definisce *A* potrà avere il numeratore uguale al denominatore.

Dimostriamo che si tratta del suo estremo superiore.

Consideriamo un numero reale minore di 1; chiamiamolo $1-\varepsilon$, ove ε è un numero reale positivo arbitrario.

E' ovvio che se ε è ≥ 1, $1-\varepsilon$ sarà negativo e quindi non potrà essere un maggiorante di *A*, i cui elementi sono tutti positivi. Supponiamo quindi che sia $0 < \varepsilon < 1$.

Vediamo che $1-\varepsilon$, qualunque sia ε, non può essere un maggiorante di A perché esiste (almeno) un elemento di A maggiore di esso; quindi il minimo dei maggioranti di A sarà proprio 1.



Vediamo se può esistere un elemento di A maggiore di esso:

$$\frac{n^2+2}{n^2+3} > 1-\varepsilon. \qquad (1)$$

Per la positività del denominatore, questa equivale a

$$n^2+2 > n^2+3-\varepsilon n^2-3\varepsilon.$$

Questa a sua volta equivale a

$$\varepsilon n^2 > -3\varepsilon+1.$$

Questa disuguaglianza è verificata per $n < -\sqrt{\frac{-3\varepsilon+1}{\varepsilon}}$, oppure per $n > \sqrt{\frac{-3\varepsilon+1}{\varepsilon}}$.

Non si dimentichi poi che $n \in N$, quindi $n \geq 0$.

Sarà quindi sufficiente prendere un valore di n maggiore dell'espressione trovata perché la disuguaglianza (1) sia verificata e quindi $1-\varepsilon$ non è un maggiorante di A.

ATTIVITA' N. 15:

Esaminare l'insieme

$$A := \left\{(-1)^n \frac{2n-1}{n}; n \in N^*\right\} ,$$

formulando una congettura sui suoi estremi.

Conduciamo una indagine "sperimentale" utilizzando la funzione **vector** di *DERIVE*.

Selezionare **Author** e digitare **vector((-1)^n (2n-1)/n,n,1,100)** <↵>, poi selezionare **Simplify** ed infine **approX**.

Appare un insieme di valori a segni alternati.

Per esaminare meglio l'insieme si suggerisce di considerare separatamente i due sottoinsiemi dei valori negativi (corrispondenti ad n dispari) e quello dei valori positivi (corrispondenti ad n pari).

Evidenziare con i tasti cursore la funzione prima digitata, selezionare **Author** e premere **<F3>** per riportare la funzione nella linea di editing. Modificare la funzione originale inserendo il passo 2,[12] poi selezionare **approX**.

Con la stessa tecnica si modifichi la funzione in modo da visualizzare solo i valori positivi.

Non è difficile congetturare che inf $A = -2$, sup $A = 2$.

[12] V. la Sintesi della Scheda n. 1.