Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **9**

ARGOMENTO: Successioni.

(LEZIONI N. 8 e 9)

ATTIVITA' N. 1:

Si vuole simulare la successione dei risultati ottenuti da una calcolatrice in cui viene immesso il numero 3 e viene premuto ripetutamente il tasto per calcolare la radice quadrata.

> Poiché si tratta di una funzione ricorsiva, cioè che, partendo da un valore iniziale, utilizza il valore ottenuto come suo nuovo argomento, la soluzione migliore è quella di utilizzare la funzione **iterates** (v. Scheda n. 3, Attività n. 3).

Selezionare **Author** e digitare **iterates(√a, a, 3, 20)** <↵>, poi selezionare **Simplify**.

> Questo comando produce un vettore che ha come primo elemento 3, come secondo la sua radice quadrata, poi la radice quadrata della radice quadrata, e così via per 20 volte.

Evidenziare il vettore ottenuto e selezionare **approX**. Scorrere con i tasti cursore gli elementi del vettore ottenuto.

> Appare una successione di valori decrescenti che si avvicinano sempre più a 1. Anzi, si noti che, a partire da un certo elemento del vettore, tutti i termini appaiono uguali ad 1.

Selezionare **Options Precision** e nel campo **Digits** digitare **12 <↵>.**

Evidenziare la funzione **iterates** prima digitata e selezionare **approX**. Scorrere con i tasti cursore gli elementi del nuovo vettore così ottenuto.

> E' evidente che gli ultimi elementi del precedente vettore apparivano uguali ad 1 solo perché la differenza tra il loro valore ed 1 era inferiore alla precisione stabilita nel calcolo approssimato.

Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato operando con la funzione **vector(3^(1/(2^n)), n, 0, 20)**.

Ripetere il precedente "esperimento" assumendo come valore iniziale un numero positivo < 1, ad esempio 1/4.

ATTIVITA' N. 2:

In questa Attività si vuole visualizzare una successione sotto forma di punti sull'asse delle ascisse utilizzando la grafica di *DERIVE*.

Selezionare **Author** e digitare **vector([1/n, 0], n,1, 50)** <↵>, poi selezionare **Simplify**.

> Viene generato un vettore di punti, tutti situati sull'asse delle ascisse avendo ordinata nulla; le loro ascisse sono uguali ai primi 50 termini della successione 1/*n*.

Selezionare **Plot** per accedere all'ambiente di grafica, poi selezionare **Options State**.

Nel campo **Mode** selezionare **Discrete**, nel campo **Size** selezionare **Large** (probabilmente non sarà necessario selezionare esplicitamente queste impostazioni, perché sono quelle di default di *DERIVE*).

In questo modo il vettore bidimensionale viene visualizzato sullo schermo di grafica come un punto le cui coordinate sono le componenti del vettore. Un vettore di vettori, come in questo caso, sarà rappresentato come un insieme di punti sul piano.
L'opzione **Mode: Discrete** traccerà i punti non collegati tra loro; l'opzione **Size: Large** traccerà i punti sotto forma di quadratini formati da 3 pixel per lato per renderli più visibili.

Selezionare ancora **Plot** per tracciare i punti rappresentati nel vettore prima ottenuto.

Appare un insieme di punti sull'asse delle ascisse corrispondenti ai primi 50 termini della successione. Si noti che, a parte i primi due o tre, appaiono talmente vicini da non poterli distinguere l'uno dall'altro.

Realizzare un "effetto zoom" cioè un ingrandimento dell'immagine premendo più volte il tasto **<F9>**.

I punti appaiono più distanziati l'uno dall'altro ma ancora sono sempre più ravvicinati all'approssimarsi verso l'origine.
Perché agli ingrandimenti più elevati (ad esempio con **Scale** = 0.01) appare una regione "vuota", cioè un segmento privo di elementi della successione, a destra dell'origine? Qual'è la lunghezza di quel segmento? L'esistenza di questo segmento dipende dalla successione o dalla nostra rappresentazione di essa?

Per rispondere a questi quesiti si consiglia di ripetere il calcolo precedente per i primi 100, 200, 300 termini della successione e di visualizzare i corrispondenti vettori di punti.

ATTIVITA' N. 3:

In questa Attività si vuole utilizzare la grafica di *DERIVE* per visualizzare la successione a_n sotto forma di punti sul piano cartesiano con coordinate (n; a_n) [1].

Cancellare il grafico dall'ambiente di Grafica con il comando **Delete All**, premere più volte il tasto **<F10>** fino a riportare la scala a **x:1** e **y:1**, poi tornare all'ambiente di Algebra.
Selezionare **Author** e digitare **vector([n, 1/n], n, 1, 20) <↵>**; selezionare **Simplify**.

Con questo comando i primi 20 termini della successione vengono rappresentati non come punti sull'asse delle ascisse, ma come punti del piano; l'n-esimo punto avrà coordinate (n; $1/n$).
Questo modo di rappresentare gli elementi di una successione è anche coerente con la definizione di successione: una funzione avente come dominio l'insieme dei numeri naturali.

Selezionare **Plot** per accedere all'ambiente di Grafica. Spostare il cursore grafico lungo l'asse delle ascisse fino a portarsi vicino al bordo destro dello schermo (si consiglia di usare <**ctrl**> + <**freccia a destra**> invece di <**freccia a destra**> per rendere il movimento più veloce), poi selezionare **Center** ed infine **Plot**.

Viene visualizzata sullo schermo una regione del semipiano $x > 0$ più ampia del normale e l'origine degli assi si trova all'estrema sinistra dello schermo.

---

[1] Altri esempi di successioni (e serie) rappresentate graficamente con istogrammi si trovano nella Scheda n. 26.

Il fatto che è $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ può essere interpretato nella figura osservando che, a partire da un opportuno n in poi, tutti i punti che rappresentano i termini della successione sono compresi tra le rette $y = -\varepsilon$ ed $y = \varepsilon$ e ciò qualunque sia il numero positivo ε. [2]

ATTIVITA' N. 4:

Cancellare lo schermo di Grafica, passare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare **vector([n, fib(n+1)/fib(n)], n, 1, 10)** <↵>, poi selezionare **Simplify**. [3]
Visualizzare i termini della successione così ottenuti nello schermo di Grafica. Tornare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author**, digitare **(1+√5)/2** <↵> e infine passare allo schermo di Grafica e selezionare **Plot** per tracciare il grafico della retta $y = (1+\sqrt{5})/2$.

Si ottiene un grafico simile alla figura 3.2-2 a pag. 194 del Testo di riferimento.

ATTIVITA' N. 5:

Seguendo le indicazioni delle precedenti Attività, tracciare il "grafico" delle successioni

$$a_n := (-1)^n; \quad b_n := n \bmod 5$$

modificando opportunamente la scala, se necessario, con i comandi descritti nella Scheda n. 5.

Si ricordi che l'operazione a mod b fornisce il resto della divisione intera tra i naturali a e b. [4]

Si tratta di due successioni limitate. Infatti $-1 \le a_n \le 1$; $0 \le b_n \le 4$, $\forall n$.

Si osservi però che in entrambi i casi le successioni non hanno limite per $n \to +\infty$, cioè non esiste un "valore privilegiato" L tale che, per qualunque ε positivo, tutti i punti che rappresentano i termini delle successioni a partire da un opportuno n siano compresi nella parte di piano delimitata dalle rette di equazioni $y = L - \varepsilon$ e $y = L + \varepsilon$.

Ad esempio basterà prendere un $e < 1$ nella prima successione e $e < 2$ nella seconda perché non esista alcun n a partire dal quale sia possibile "racchiudere" tutti i termini della successione tra $L-\varepsilon$ ed $L+\varepsilon$.

ATTIVITA' N. 6:

Calcolare il $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{2n+1}$.

La successione è già stata analizzata nell'Attività n. 9 della Scheda n. 4. In tale occasione si è visto che la successione [5] è limitata e decrescente. Il suo estremo inferiore è 3/2, dunque la successione data converge a 3/2.

Si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che, dividendo numeratore e denominatore per n, si ha

$$\frac{3n+4}{2n+1} = \frac{3+4/n}{2+1/n}.$$

E' sufficiente ora ricordare che $1/n$ e $4/n$ convergono a zero per $n \to +\infty$.

---

[2] V. anche *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, pag. 193.

[3] La funzione **fib(n)** è stata definita nell'Attività n. 13 della Scheda n. 1 ed è disponibile nel dischetto allegato; se l'elaboratore che ha a disposizione non è molto veloce, il lettore sia paziente.

[4] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, pag. 3. Per l'uso dell'operatore **mod** in *DERIVE*, v. Scheda n. 3, Attività n. 8 e n. 9.

[5] ovvero l'insieme *A immagine della successione.*

ATTIVITA' N. 6:

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{n^2+3}.$$

La successione è stata studiata nell'Attività n. 14 della Scheda n. 4. Si mostrò che la successione è limitata e crescente e che il suo estremo superiore è 1.
Dunque la successione converge a 1.
Si poteva arrivare allo stesso risultato dividendo numeratore e denominatore per n^2.

$$\frac{n^2+2}{n^2+3} = \frac{1+2/n^2}{1+3/n^2}.$$

Si noti anche che, essendo $n^2 \ge n$ per ogni naturale $n > 0$, è $0 < \frac{k}{n^2} \le \frac{k}{n}$, con $k > 0$.
Quindi, dato che k/n converge a 0, anche k/n^2 converge a 0.

ATTIVITA' N. 7:

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2+n\right).$$

La successione è stata studiata nell'Attività n. 7 della Scheda n. 4. In tale occasione si è visto che la successione è inferiormente limitata ma superiormente illimitata e che è crescente e quindi il suo estremo superiore è $+\infty$. Dunque la successione diverge.

ATTIVITA' N. 8:

Si consideri la successione definita ricorsivamente ponendo

$$a_1 := \sqrt{2}\,, \quad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n}\,, \quad n \ge 1.$$

Si dimostri che $a_n < 2$ per ogni n e si deduca da ciò che la successione in esame è strettamente crescente. Detto $L \le 2$ il limite della successione, passando al limite nella formula ricorsiva che definisce a_{n+1} si ottenga $L = 2$. [6]

Per toccare "con mano" la successione si potrebbero calcolare con *DERIVE* i suoi primi elementi.
Esistono diversi modi per realizzarlo; uno è quello di definire la funzione **a(n) := if (n=1, √2,√(2 + a(n-1))** per poi ottenere i primi cinque valori approssimati della successione con **vector(a(n), n, 1, 5)**. Un altro modo, assai più veloce in esecuzione, è quello di approssimare la seguente espressione: **iterates(√(2+a), a, 0, 5)** ignorando il primo termine che viene fornito ($a = 0$) che serve solo per "innescare" l'iterazione.
Si noti la elevata rapidità con cui, fin dai primi termini, i valori ottenuti si avvicinano a 2. [7]

Dimostriamo per induzione che $a_n < 2$ per ogni n.
La proprietà $P(n)$ è ovviamente vera per $n = 1$.
Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Sfruttando l'ipotesi che $a_n < 2$, si ha

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2.$$

La successione è crescente; infatti vediamo che $a_{n+1} < a_n$ per ogni n utilizzando il risultato che $2 > a_n$:

---

6 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, es. 3.7-12, pag. 227.

7 Si potrebbe anche omettere l'ultimo parametro, cioè il numero delle iterazioni (v. Scheda n. 3, Attività n. 10).

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n a_n} = a_n.$$

Osserviamo che se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, anche $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = L$.
Passando al limite nella formula ricorsiva:
$L = \sqrt{2+L}$ che equivale, trattandosi di termini tutti positivi, a $L^2 = 2+L$.
L'equazione nell'incognita L è soddisfatta per $L = -1$, soluzione ovviamente non accettabile a causa della sua negatività, o per $L = 2$.

ATTIVITA' N. 9:
Si consideri la successione definita da

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \sqrt{3a_n + 4}, \quad n \geq 0.$$

Si verifichi che si tratta di una successione monotona crescente; se ne determini il limite. [8]

Anche in questo caso si può dare un sguardo con *DERIVE* ai primi termini della successione selezionando **approX** sulla funzione **iterates(√(3a + 4), a, 0)**.
Si ricordi amcora una volta che, quando non è specificato il numero di iterazioni, il ciclo **iterates** ha termine quando si ottiene un valore uguale [9] ad uno già ottenuto.

Dimostriamo dunque che $a_n < a_{n+1}$ per ogni n.
La disequazione

$$a_n < \sqrt{3a_n + 4}$$

dato che a_n ed anche $3a_n + 4$ sono certamente non negativi per ogni n, è equivalente a

$$a_n^2 < 3a_n + 4.$$

Questa disuguaglianza è vera per $-1 < a_n < 4$.
Che a_n sia maggiore di 0 e quindi anche di -1 per ogni n, è ovvio.
La crescenza della successione sarà quindi dimostrata se si riesce a vedere che $a_n < 4$ per ogni n.
Dimostriamolo per induzione.
$P(0)$ è indubbiamente vera, essendo $0 < 4$.

Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Grazie all'ipotesi che $a_n < 4$, avremo

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} < \sqrt{3 \cdot 4 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

Dunque la successione è limitata (sia superiormente che inferiormente) e monotona crescente, quindi esiste il suo limite L.
Passando al limite nella formula della definizione ricorsiva:

$$L = \sqrt{3L + 4}.$$

Da questa si ottengono le soluzioni $L = -1$, soluzione ovviamente non accettabile a causa della sua negatività, ed $L = 4$ che è quindi il limite cercato.

ATTIVITA' N. 10:
Consideriamo la successione definita in modo ricorsivo ponendo

$$a_0 := a_1 := a_2 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{2}{3}(a_n + a_{n-1} + a_{n-2}), \quad n \geq 2.$$

---

8 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, es. 19 pag. 476.

9 "uguale" nel senso di "indistinguibile" al livello di precisione di macchina a cui *DERIVE* è stato predisposto con il comando **Option Precision**.

Verificare che si tratta di una successione monotona: $a_n \le a_{n+1}$.
Se ne deduca che si tratta di una successione positivamente divergente ragionando per assurdo. [10]

Dimostriamo per induzione che si tratta di una successione monotona.
Sia $P(n)$ la proposizione "$a_{k+1} \ge a_k$ per ogni $k \le n$".
Le proposizioni $P(0)$ e $P(1)$ sono senza dubbio vere.
Dimostriamo che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
L'ipotesi è che $a_{k+1} \ge a_k$ per $k \le n$. La tesi è che $a_{k+1} \ge a_k$ per $k \le n+1$.
La tesi è senz'altro vera per $k < n + 1$, cioè $k \le n$, perché coincide con l'ipotesi. E' vera anche per $k = n + 1$. Infatti

$$a_{(n+1)+1} = a_{n+2} \ge a_{n+1}$$

equivale, per la definizione della successione, a

$$\frac{2}{3}(a_{n+1} + a_n + a_{n-1}) \ge \frac{2}{3}(a_n + a_{n-1} + a_{n-2})$$

che è senz'altro vera dato che per ipotesi gli addendi del primo membro sono ordinatamente maggiori o uguali degli addendi del secondo membro.
Ragioniamo per assurdo per vedere che si tratta di una successione divergente positivamente: supponiamo che la successione converga al limite finito L che sarà > 1 dato che il termine iniziale della successione è 1 e la successione stessa è crescente.
Passando al limite nella formula ricorsiva si ha $L = 2/3\,(L + L + L)$, da cui si ottiene $L = 2L$ e quindi $L = 0$, in contrasto con il fatto che $L > 1$.

<u>ATTIVITA' N. 11:</u>
E' assegnato un segmento di estremi A e B di lunghezza L. Sia C_1 il punto medio di AB, C_2 il punto medio di AC_1, C_3 il punto medio di C_2C_1, C_4 il punto medio di C_2C_3,....
Qual'è la posizione limite di C_n per $n \to +\infty$? [11]

Supponiamo, per maggior comodità, che sia $L = 1$.
Valutiamo la misura di AC_n : in pratica, partendo da A, che potremmo anche ribattezzare C_0, si avanza di 1/2 portandosi in C_1, poi si retrocede di 1/4 portandosi in C_2, poi si avanza di 1/8 portandosi in C_3 e così via.

Si genera così la seguente successione:
$a_0 := AC_0 = 0,$
$a_1 := AC_1 = 0 + 1/2,$
$a_2 := AC_2 = 0 + 1/2 - 1/4,$
$a_3 := AC_3 = 0 + 1/2 - 1/4 + 1/8,$
$a_4 := AC_4 = 0 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16,$
. . . .

$$a_n := AC_n = a_{n-1} - \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

Esplorare la successione con *DERIVE*, definendo la successione ricorsiva **a(n) := if(n=0, 0, a(n-1) - (-1)^n/2^n)** e approssimando, ad esempio, **vector(a(n), n, 0, 10)**.
Si consiglia anche di tracciare il "grafico" della successione come è stato indicato nelle Attività n. 3 e 4.

---

10 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 18 pag. 476.
11 V. *G. C. Barozzi, op cit.* , es. 23 pag. 476.

Appariranno dei punti che "oscillano" intorno alla retta di equazione $y = 1/3$, con una ampiezza di oscillazione che si riduce sempre più, procedendo verso destra, con un andamento simile a quello della successione vista nell'Attività n. 4.

I termini di indice pari e quelli di indice dispari della nostra successione costituiscono due classi contigue, l'una crescente e l'altra decrescente.

Le due classi possono essere visualizzate rispettivamente digitando **vector(a(n), n, 0, 10, 2)** e **vector(a(n), n, 1, 10, 2)**, poi selezionando **approX**: si procede a passi di due, partendo rispettivamente da 0 e da 1.

Vediamo che i termini di indice pari sono in ordine crescente: cioè $a_n < a_{n+2}$ per ogni n pari. Infatti per definizione, supponendo n pari e quindi $n + 1$ dispari, è

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{2^{n+2}} = a_n + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Ma dalla relazione $2^{n+2} > 2^{n+1}$, si ottiene $\frac{1}{2^{n+2}} < \frac{1}{2^{n+1}}$, quindi $a_n < a_{n+2}$ essendo positiva la differenza $\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}}$.

In modo analogo si dimostra la decrescenza della classe formata dai termini di indice dispari.

Le due classi sono contigue: infatti la differenza tra due termini consecutivi della successione è:

$$\left|a_{n+1} - a_n\right| = \left|a_n - \frac{(-1)^n}{2^n} - a_n\right| = \frac{1}{2^n}$$

e quindi può essere resa minore di un qualunque ε positivo purché n sia abbastanza "grande".

Mostriamo che la successione converge a 1/3, come previsto nell'esplorazione effettuata in precedenza.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che n sia dispari.

Avremo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right). \end{aligned}$$

L'espressione chiusa tra parentesi rappresenta la somma dei primi n' +1 termini di una progressione geometrica di primo elemento 1 e ragione 1/4, ove $n' = (n+1)/2$.

Come è noto [12], la somma dei termini con esponente $\leq n$ della progressione geometrica di primo elemento 1 e ragione x è

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Quindi avremo

$$a_n = \frac{1}{4}\,\frac{1 - (1/4)^{n'+1}}{3/4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n'+1}.$$

Si noti che $n' \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

---

[12] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, esempio 1.6-3, pag. 47.

Passando al limite per $n \to +\infty$ e osservando che $(1/4)^{n'+1}$ converge a 0, abbiamo che il limite cercato è 1/3.

Ovviamente se il segmento *AB* ha lunghezza *L*, la posizione limite di C_n è alla distanza *L*/3 da *A*.

SINTESI
<u>CONFIGURAZIONE - GRAFICA</u> *DERIVE* può disegnare un punto con il comando **Plot** se questo è rappresentato sotto forma di vettore bidimensionale: le coordinate devono essere scritte chiuse tra parentesi quadre, separate dalla virgola; un insieme di punti potrà essere disegnato se rappresentatato sotto forma di "vettore di vettori" bidimensionali. Nel menu **Plot Options State** il campo **Mode** permette di scegliere tra il disegno di punti isolati (**Discrete**) o congiunti, l'uno dopo l'altro, da una linea spezzata (**Connected**). Il campo **Size** permette di scegliere le dimensioni della rappresentazione dei punti sul piano: con **Small** ogni punto viene rappresentato da un pixel sullo schermo, con **Large** viene reso più visibile mediante un quadratino di tre pixel di lato.