Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 10

ARGOMENTO: Limiti di funzioni.

(LEZIONI dalla 10 alla 14)

ATTIVITA' N. 1:

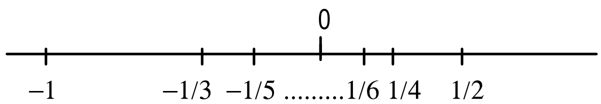
Si verifichi che ciascuno degli insiemi $[0, 1] \cap Q$, $[0, 1] - Q$ (cioè l'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri irrazionali dell'intervallo [0, 1]), hanno entrambi come insieme dei punti di accumulazione l'intero intervallo [0, 1]. [1]

Cominciamo con l'osservare che se il punto x_0 è esterno all'intervallo [0, 1], cioè se è $x_0 > 1$ oppure $x_0 < 0$, non è un punto di accumulazione per entrambi gli insiemi.
Infatti se, ad esempio, $x_0 > 1$, sarà sufficiente prendere $r < x_0 - 1$ perché ogni intorno $I(x_0; r)$ di centro x_0 e raggio r non abbia alcun punto in comune né razionale né irrazionale con l'intervallo [0, 1]. Se invece è $x_0 < 0$ basterà prendere un raggio $r < -x_0$ per ottenere ancora un intorno $I(x_0; r)$ privo di intersezioni con [0, 1]. In entrambi i casi x_0 non è quindi punto di accumulazione degli insiemi dati.
Se invece x_0 appartiene all'intervallo [0, 1], qualunque sia il raggio r, l'intorno $I(x_0; r)$ contiene infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali per la proprietà di densità di Q in R (V. Corollario 2, pag. 51 del Testo di riferimento).
Per finire si osservi che si sarebbe ottenuto lo stesso insieme di punti di accumulazione se si fossero considerati gli insiemi $]0, 1[\cap Q$, $]0, 1[- Q$.

ATTIVITA' N. 2:

Determinare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi $A_1 := \left\{(-1)^n \frac{1}{n};\, n \in N^*\right\}$ e $A_2 := \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n};\, n \in N^*\right\}$. [2]

L'insieme A_1 è l'immagine di una successione a segni alterni che converge ovviamente a 0.



Quindi 0 sarà un punto di accumulazione di A_1, cioè qualunque sia il numero reale positivo r, l'intorno $I(0; r) =]-r, r[$ conterrà infiniti elementi di A_1.
Ciò equivale a dire che esistono infiniti elementi di A_1 tali che la loro distanza da 0 sia minore di r :

$$\left|0 - (-1)^n \frac{1}{n}\right| = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < r$$

che è vera per ogni $n > 1/r$. Non esistono altri punti di accumulazione di A_1. Infatti supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione diverso da 0. Tanto per fissare le

[1] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, es. 3.3-1, pag. 200.

[2] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 3.3-4, pag. 200.

idee supponiamo che sia positivo. Per ogni r reale positivo dovrebbero esistere infiniti elementi di A_1 appartenenti all'intorno $I(x_0; r)$.
Invece se prendiamo un $r < x_0$ a questo intorno appartiene solo un numero finito di elementi di A_1: infatti si noti che gli elementi dell'intorno $]x_0 - r, x_0 + r[$ sono solo positivi, essendo $x_0 - r > 0$.
Gli elementi di A_1 appartenenti all'intorno, quindi del tipo $1/n$, con n pari, sono quelli che soddisfano la disuguaglianza $x_0 - r < 1/n < x_0 + r$.
Poiché i termini della disuguaglianza sono positivi, questa equivale, considerando i reciproci e invertendo di conseguenza il senso della disuguaglianza, a

$$\frac{1}{x_0 + r} < n < \frac{1}{x_0 - r}$$

che è certo verificata solo per un numero finito di numeri naturali.

L'insieme A_2 è l'immagine di una successione a segni alterni limitata ma non convergente. Si consiglia di generare con *DERIVE* alcuni elementi dell'insieme ed eventualmente di visualizzarli in un grafico con le stesse modalità indicate nell'Attività n. 3 della Scheda n. 9.
L'insieme può essere pensato come l'unione dei due insiemi

$$A_2' := \left\{\frac{n+1}{n}, n \in N^*, n \text{ pari}\right\} \text{ e } A_2''\left\{-\frac{n+1}{n}, n \in N^*, n \text{ dispari}\right\}.$$

Mostriamo che 1 è punto di accumulazione di A_2' e quindi di A_2 in cui esso è incluso: basterà osservare che $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ e ricordare che il comportamento dell'insieme $\{1/n, n \in N^*, n \text{ pari}\}$ è ovviamente lo stesso dell'insieme $\{1/n, n \in N^*\}$.
Analogamente si può mostrare che -1 è punto di accumulazione di A_2'' e quindi anche di A_2.
Quelli trovati sono gli unici punti di accumulazione di A_2: analogamente a ciò che è stato fatto nel primo esercizio, supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione di A_2 e, tanto per fissare le idee, supponiamo che sia positivo.
Se riusciamo a trovare un intorno di x_0 che non contiene infiniti elementi di A_2, abbiamo raggiunto la prova che x_0 non può essere un punto di accumulazione.

Consideriamo un intorno $I(x_0, r)$ di raggio r.
Gli elementi di A_2 appartenenti all'intorno (con n pari per le nostre ipotesi) sono quelli che soddisfano la disuguaglianza

$$x_0 - r < 1 + \frac{1}{n} < x_0 + r$$

che equivale, sottraendo 1 a ciascun membro, a

$$x_0 - r - 1 < \frac{1}{n} < x_0 + r - 1.$$

Se prendiamo un r che sia minore di $x_0 - 1$ i termini della disuguaglianza sono positivi e quindi la precedente disuguaglianza equivale a

$$\frac{1}{x_0 + r - 1} < n < \frac{1}{x_0 - r - 1}$$

che è ovviamente verificata solo per un numero finito di numeri naturali.

ATTIVITA' N. 3:

Verificare con la definizione di limite che $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x - 3} = 1$.

Cominciamo con l'osservare che il dominio naturale della funzione è $x \geq \frac{3}{2}$, ossia l'intervallo $[3/2, +\infty[$, insieme di cui 2 è uno dei punti di accumulazione.

Dovremo vedere che, qualunque sia $\varepsilon > 0$, possiamo associare ad esso un $\delta > 0$ tale che sia

$$\left| \sqrt{2x-3} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (1)$$

per ogni x appartenente al dominio della funzione, con $0 < |x-2| < \delta$, il che equivale a $2-\delta < x < 2+\delta$, $x \neq 2$.

La (1) equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 1-\varepsilon & (2) \\ \sqrt{2x-3} < 1+\varepsilon. & (3) \end{cases}$$

Risolviamo la (2): se $\varepsilon > 1$, la (2) è vera per ogni $x \geq 3/2$.

Se invece $\varepsilon \leq 1$, sia il primo che il secondo membro della (2) sono non negativi per ogni $x \geq 3/2$. Possiamo quindi elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione:

$$2x-3 > 1-2\varepsilon+\varepsilon^2,$$

da cui otteniamo

$$x > \frac{4+\varepsilon^2-2\varepsilon}{2} = 2+\frac{\varepsilon(\varepsilon-2)}{2} = 2-\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2}.$$

Si noti che $\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2}$ è positivo per l'ipotesi che sia $\varepsilon \leq 1$.

Risolviamo ora la (3): entrambi i membri sono positivi per $x \geq 3/2$, quindi la disequazione equivale a

$$2x-3 < (1+\varepsilon)^2$$

che è verificata per

$$x < \frac{3+1+2\varepsilon+\varepsilon^2}{2} = 2+\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2}.$$

Dunque il sistema, cioè la disequazione (1), è verificata per

$$2-\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2} < x < 2+\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2}.$$

Se quindi poniamo

$$\delta = \begin{cases} \min\left\{\frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{2}, \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2}\right\}, \ \text{se } \varepsilon \leq 1 \\ \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2}, \ \text{se } \varepsilon > 1 \end{cases}$$

avremo che la (1) è verificata per tutti gli x appartenenti all'insieme

$$(A-\{2\}) \cap I(2;\delta),$$

ove A indica il dominio della funzione.

<u>ATTIVITA' N. 4:</u>

Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Questa funzione può essere pensata come il rapporto tra le due funzioni polinomiali $y = f(x) = x^3-6x^2+11x-6$ e $y = g(x) = x^3-4x^2+5x-2$.

Trattandosi di funzioni polinomiali e quindi continue, è:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \ \text{ e } \ \lim_{x\to 2} g(x) = g(2).$$

Per valutare $f\,(2)$ si può utilizzare l'algoritmo di Horner visto nell'Attività n. 4 della Scheda n. 7:

	1	–6	11	–6
2		2	–8	6
	1	–4	3	0

Quindi $f(2) = 0$.

Analogamente valutiamo $g(2)$:

	1	–4	5	–2
2		2	–4	2
	1	–2	1	0

Quindi $g(2) = 0$.
Ci troviamo quindi nell'impossibilità di applicare il teorema sul limite della funzione quoziente (v. Proposizione 3.5-1 a pag. 205 del Testo di riferimento): il nostro limite si presenta come forma indeterminata.
Si noti anche che la funzione data è definita proprio per $x \neq 2$.
Sfruttando il precedente risultato per scomporre in fattori il numeratore ed il denominatore della funzione si ha:

$$\frac{(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)(x^2-2x+1)}$$

che, per $x \neq 2$, è uguale a

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}.$$

A questa funzione può essere applicato il già citato teorema sul limite della funzione quoziente ed il limite cercato è $= -1$.

ATTIVITA' N. 5:

Si vuole calcolare con *DERIVE* il limite proposto nella precedente Attività.
Selezionare **Author** e digitare la funzione data (non si dimentichino le necessarie parentesi).
Selezionare **Calculus Limit**, premere <↵> per confermare di voler operare sulla funzione evidenziata, premere ancora <↵> per confermare il nome della variabile proposta (la **x**), scrivere **2** nel campo **Point** per specificare il valore a cui tende la variabile *x*, confermare ancora con <↵>.

Nella finestra di Algebra appare il limite indicato secondo la solita notazione.

Selezionare **Simplify** e premere <↵> per confermare il calcolo dell'espressione evidenziata.

Nella finestra di Algebra appare il risultato.

ATTIVITA' N. 6:

Calcolare il seguente limite [3]: $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

Ci troviamo di fronte ad una situazione simile a quella vista nell'Attività n. 4: poiché $\sin(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi/2) = 0$, sia la funzione al numeratore che quella al denominatore convergono a 0 per $x \to \pi/2$.
Però, per $x \neq \pi/2 + 2k\pi$, $k \in Z$ e ricordando i noti prodotti notevoli

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{e} \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

3 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 35, pag. 477.

si ottiene

$$\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{1-\sin^2 x}=$$
$$=\frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1+\sin x+\sin^2 x}{1+\sin x}.$$

Dunque il nostro limite, applicando le proprietà della Proposizione 3.5-1 a pag. 205 del Testo di riferimento e la continuità delle funzioni circolari (v. pag. 212 del Testo di riferimento) è

$$\frac{1+\sin(\pi/2)+\sin^2(\pi/2)}{1+\sin(\pi/2)}=\frac{3}{2}.$$

ATTIVITA' N. 7:

Verificare che la funzione $x \to x+\frac{1}{x},\ x>0$, tende a $+\infty$ tanto per $x \to +\infty$, quanto per $x \to 0$.[4]

La funzione è definita per ogni $x \neq 0$.

Dire che $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ significa che ad ogni intervallo $]M,+\infty[$, con $M>0$, è possibile associare un intorno $I(0;\delta_M)$ tale che

$$f(A^*(0;\delta_M)) \subseteq\ ]M,+\infty[;$$

dire che $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ significa che ad ogni intervallo $]M,+\infty[$, con $M > 0$, è possibile associare un "intorno di $+\infty$", cioè un intervallo $]\delta_M,+\infty[$ tale che

$$f(]\delta_M,+\infty[\cap A) \subseteq\ ]M,+\infty[,$$

ove A è il dominio della funzione e $A^*(0;\delta_M)$ indica l'intersezione tra tale dominio e l'intorno $I(0;\delta_M)$ con l'esclusione dello 0 stesso.

In altre parole ciò significa che, comunque si scelga $M > 0$, la relazione $f(x) > M$ dovrà essere verificata sia in un opportuno intorno di 0 che in un opportuno "intorno di $+\infty$", intorni che dipendono dal valore prescelto di M.

Ci proponiamo dunque di risolvere la disequazione $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>M$.

A causa dell'ipotesi $x > 0$, è lecito moltiplicare i due membri della disuguaglianza per x, ottenendo così, dopo aver trasportato Mx a primo membro:

$$x^2-Mx+1>0. \quad (1)$$

Gli zeri della funzione polinomiale a primo membro esistono in R solo se il discriminante M^2-4 è non negativo, cioè se M è ≥ 2 (si ricordi l'ipotesi $M > 0$).

In tale caso gli zeri della funzione polinomiale sono:

$$x_1=\frac{M-\sqrt{M^2-4}}{2};\ x_2=\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$$

e la disequazione (1) è verificata per $x \in\ ]-\infty,x_1[$ oppure per $x \in\ ]x_2,+\infty[$. [5]

Si noti anche che sia x_1 che x_2 sono numeri entrambi positivi. [6]

Basterà dunque assumere $\delta_M=x_1$ e la relazione $f(x) > M$, essendo verificata per $x<x_1$ a maggior ragione sarà verificata nell'intorno $I(0;\delta_M)$.

---

[4] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 3.5-2, pag. 209.

[5] V. Scheda n. 7, Attività n. 1.

[6] La cosa è verificabile con elementari considerazioni algebriche o usando la "regola dei segni di Cartesio": v. es. 2.2-6 a pag. 117 del Testo di riferimento.

Ma la relazione $f(x) > M$ è verificata anche per $x > x_2$; assumendo $\delta_M = x_2$ otterremo anche il desiderato "intorno di $+\infty$".
Se poi è $0 < M < 2$, la (1) è verificata per ogni x.
Quindi in ogni caso, per qualunque valore positivo di M è possibile trovare i desiderati intorni di 0 e di $+\infty$.

La verifica richiesta è stata effettuata utilizzando le definizioni di limite di una funzione.

Si sarebbe potuto pervenire più facilmente allo stesso risultato utilizzando le proprietà dei limiti ed i teoremi di confronto:
Per l'ipotesi $x > 0$, è $x + \frac{1}{x} > x$.
Quindi, dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, è $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.
Dato che $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ (con $x > 0$), è $\lim\limits_{x\to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

ATTIVITA' N. 8:

Si vuole calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$.
Dopo aver selezionato **Author** si digiti la funzione **(x^2+1)/x <↵>**.
Selezionare **Calculus Limit**, premere <↵> per confermare la funzione prima digitata, premere ancora <↵> per confermare la variabile **x**, nel campo **Point** digitare **0** e infine confermare con <↵>.

Appare il simbolo di limite.

Selezionare **Simplify**.

Appare il risultato $\pm\infty$. [7]
Questo è il modo con cui *DERIVE* comunica all'utente che la funzione data diverge ma che non è in grado di stabilire per "carenza di informazioni" se diverge a $+\infty$ o a $-\infty$.
Un facile studio del segno ci rivela che la funzione data è positiva per $x > 0$ ed è negativa per $x < 0$ (il numeratore $x^2 + 1$ è positivo per ogni x).
Quindi è $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty$ ed il limite dato non esiste perché il limite a sinistra e a destra sono diversi.

Evidenziare con i tasti cursore la funzione digitata, poi selezionare ancora **Calculus Limit** e ripetere le azioni precedenti, ma, quando il cursore si trova nel campo **Point**, premere **<tab>** per portarsi nel campo **From**; premere **<spazio>** fino ad evidenziare **Right** e premere <↵> per confermare.

Viene così specificato che si intende calcolare il "limite a destra" della funzione assegnata per x che tende a 0.

Selezionare **Simplify**.

Questa volta *DERIVE* fornisce il valore desiderato.

Calcolare con *DERIVE* anche il $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x}$.

---

[7] In certe versioni di *DERIVE* è possibile che venga invece fornito il risultato 1/0. Le considerazioni successive rimangono comunque valide.

ATTIVITA' N. 9:

Calcolare con *DERIVE* i seguenti limiti: [8]

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\sin x\right)$.

a) Si seguano le indicazioni della precedente Attività, però nel campo **Point** si deve digitare **+inf**.
Dopo aver selezionato **Simplify** appare il risultato desiderato: ∞ (il segno **+** viene sottinteso).
Il risultato è ovviamente corretto: si tratta della somma di due funzioni, $y=x$ e $y=-\sin x$, la prima delle quali diverge positivamente, per x che tende a $+\infty$.
Il $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ non esiste: infatti non esiste nessun valore di L per cui la relazione $|\sin x-L|<\varepsilon$ sia vera $\forall\varepsilon>0$ in un opportuno "intorno di infinito", dato che sin*x* si annulla e assume i valori $+1$ e -1 infinite volte in qualunque intorno di infinito.
La seconda funzione dunque non ha limite per x che tende a $+\infty$, ma è limitata, dato che, come è noto, $-1\le\sin x\le 1$ per ogni x.
Quindi possiamo affermare che $x-1\le x-\sin x$ per ogni x.
Poiché $x-1$ diverge positivamente per x che tende a $+\infty$, possiamo applicare la Proposizione 3.6-4 a pag. 211 del Testo di riferimento.
Ciò prova che anche la funzione data diverge positivamente.

Potrebbe essere istruttivo esaminare "dal vero" la funzione data facendo tracciare da *DERIVE* il suo grafico e quello della funzione $x-1$. Per tracciare i grafici seguire le indicazioni della Scheda n. 5.
Si consiglia di premere un paio di volte il tasto funzione **<F10>** per modificare la scala e visualizzare un più ampia regione di piano.

b) Dopo aver digitato la funzione si proceda come nei casi precedenti.
Dopo aver selezionato **Simplify** si ottiene un risultato apparentemente strano: **sin(∞)**.
In questo modo *DERIVE* ci segnala che il limite cercato non esiste: infatti la funzione data è la somma delle funzioni $y=1/x$, che converge a 0 per x che tende a $+\infty$, e $y=-\sin x$ che è *indeterminata*, cioè priva di limite per x che tende a $+\infty$.

ATTIVITA' N. 10:

Calcolare i seguenti limiti: [9]

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$, d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-x\right)$.

Si noti che con $x>0$ i radicandi sono certamente positivi.

a) Se moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{x^2+3x}+x$, poi dividiamo numeratore e denominatore per x, si ottiene:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}.$$

[8] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, esercizi n. 39 e n. 38 a pag. 477.

[9] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, es. n. 52, 53, 57, pag. 477.

Applicando le note proprietà dei limiti e in particolare la continuità della funzione $y = \sqrt{x}$ e il fatto che $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$, si ha che il limite cercato è 3/2.

b) Con le stesse operazioni viste nel caso precedente si ottiene:

$$\sqrt{x^2+3} - x = \frac{(x^2+3) - x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = \frac{3/x}{\sqrt{1+3/x^2} + 1}$$

e quindi il limite cercato è 0, dato che il numeratore converge a 0 mentre il denominatore converge a 1.

c) Contrariamente agli esercizi precedenti, in questo caso non ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$: la nostra funzione può essere pensata come somma di due funzioni, $\sqrt{x^2+3}$ e $-x$, che divergono entrambi positivamente. Quindi il limite cercato è $+\infty$.

d) Moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $\sqrt{x^3+1} + x$ e dividiamo numeratore e denominatore per x^3:

$$\sqrt{x^3+1} - x = \frac{(x^3+1) - x^2}{\sqrt{x^3+1} + x} = \frac{x^3 - x^2 + 1}{\sqrt{x^3+1} + x} = \frac{1 - 1/x + 1/x^3}{\sqrt{1/x^3 + 1/x^6} + 1/x^2}.$$

Quindi il limite cercato è $+\infty$, dato che il numeratore converge a 1 mentre il denominatore converge a 0 mantenendosi positivo essendo la somma tra una radice (non negativa per definizione, fatte salve le condizioni di esistenza) ed il termine $1/x^2$, certamente positivo.

Verificare con *DERIVE* i risultati ottenuti.
Si ricordi [10] che il simbolo di radice quadrata si ottiene tenendo premuto il tasto **<alt>** e premendo le lettera **q**; il radicando va chiuso tra parentesi.

ATTIVITA' N. 11:

Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}, \qquad b) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x}.$$

a) Possiamo coomportarci come negli esercizio precedenti, dividendo sia il numeratore che il denominatore per x:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2} - 1}.$$

Poiché il numeratore è = 1, mentre il denominatore converge a 0 positivamente, dato che è la differenza tra due numeri certamente positivi il primo dei quali è maggiore del secondo, il risultato cercato è $+\infty$.

b) Anche in questo caso si può pervenire alla soluzione attraverso la divisione del numeratore e del denominatore per x. Per effettuare la divisione per x del radicale, il termine $1/x$ viene, come si usa dire nel gergo scolastico, "portato dentro" al radicale stesso diventando così $1/x^2$.
Riflettiamo un attimo su tale operazione, aiutandoci con un esempio numerico:

10 V. Scheda 0, Attività n. 7.

$$-2\sqrt{3} = -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}\ .$$

Se avessimo "portato dentro" il fattore –2 avremmo ottenuto:

$$-2\sqrt{3} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 3} = \sqrt{12}\ ,$$

uguaglianza tra due numeri discordi certamente falsa.
Nel nostro esempio x è certamente negativo; avremo così:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{x/x}{1/x \cdot \sqrt{x^2+1} - x/x} = \frac{1}{-\sqrt{1+1/x^2} - 1}.$$

Il limite cercato è quindi $-1/2$.

Verificare con *DERIVE* i risultati ottenuti.

SINTESI

MENU

Per calcolare il limite di una funzione: evidenziare la funzione nello schermo di Algebra, selezionare **Calculus Limit**, premere <↵> per confermare la funzione evidenziata, premere <↵> per confermare la variabile indicata (o digitare l'identificatore della variabile seguito da <↵>; nel campo **Point** si specifica il valore a cui tende la variabile.
Se necessario, premere **<tab>** per passare al campo **From** e premere **<spazio>** fino ad evidenziare la voce che interessa.
Selezionare **Left** per ottenere il limite "a sinistra", **Right** per ottenere il limite "a destra", **Both** (che è l'impostazione normale) se è indifferente specificarlo.
Confermare con <↵> e selezionare **Simplify** per ottenere il risultato voluto.

EDITING

Il simbolo di infinito si ottiene digitando **inf**, eventualmente preceduto dal segno.