Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 11

ARGOMENTO: Limiti di funzioni. Proprietà della funzioni continue.

(LEZIONI dalla 10 alla 14)

ATTIVITA' N. 1:

Calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Dopo aver selezionato **Author**, si digiti la funzione (senza dimenticare la parentesi che deve racchiudere l'argomento della funzione **sin**). Come si è già visto nella precedente scheda (Attività n. 7), selezionare **Calculus Limit** e fornire a *DERIVE* tutte le informazioni necessarie. Infine selezionare **Simplify**.

Il risultato fornito da *DERIVE* è piuttosto misterioso: sin(∞). [1]
Già in altre occasioni *DERIVE* ci ha fornito risultati apparentemente strani (v. Scheda n. 10, Attività n. 8 e 9) ma in ogni caso abbiamo visto che aveva i suoi buoni motivi per dare proprio quella risposta.
Analizziamo dunque più attentamente il limite proposto.

La funzione data non è definita per $x = 0$ ed è limitata perché è noto che $|\sin x| \le 1$ per ogni x. Vediamo che è priva di limite per x che tende a 0.
Per cominciare si tracci il grafico della funzione: evidenziare la funzione digitata, selezionare **Plot** per passare all'ambiente di Grafica, poi selezionare ancora **Plot** per tracciare il grafico.
Si usi il tasto funzione **<F9>** per aumentare, per così dire, l'ingrandimento della zona intorno all'origine. Appare evidente che il grafico della funzione prosegue la sua oscillazione tra i valori 1 e -1 e che le sue intersezioni con l'asse delle ascisse si "infittiscono" procedendo verso l'origine. [2]
Appare quindi palese che non esiste un valore L compreso tra 1 e -1 tale che la funzione resti all'interno della "striscia" di piano delimitata dalle rette di equazioni $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ con ε positivo arbitrario (in particolare se è $\varepsilon < 1$) con x appartenente ad un conveniente intorno dell'origine.

Allo stesso risultato si sarebbe potuto pervenire in modo rigoroso con pochi calcoli: vediamo in quali punti la funzione assume i valori 1 e -1, tenendo conto della periodicità della funzione seno:

---

[1] A seconda della versione di *DERIVE* la risposta potrebbe essere invece **?** (un punto interrogativo); le considerazioni successive rimangono comunque valide.

[2] Eventuali "irregolarità" nel grafico sono dovute a motivi "numerici": in effetti *DERIVE* non disegna *tutti* i punti di un grafico nell'intervallo specificato ma solo *alcuni* di essi, congiungendoli poi con una spezzata. Per questo motivo in casi particolarmente "patologici" come questo, il grafico non è del tutto attendibile; si riesce comunque ad avere un'idea abbastanza precisa dell'andamento del grafico della funzione.

$$\sin\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{\pi+4k\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{\pi+4k\pi}\ ,$$
$$\sin\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi=\frac{-\pi+4k\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{-\pi+4k\pi}\ ,$$

e ciò qualunque sia k appartenente all'insieme Z dei numeri interi.

Entrambi gli insiemi

$$\left\{\frac{2}{\pi+4k\pi}\,,\ k\in Z\right\} \text{ e } \left\{\frac{2}{-\pi+4k\pi}\,,\ k\in Z\right\}$$

hanno 0 come punto di accumulazione, quindi in qualunque intorno di 0 avremo sempre infiniti punti appartenenti a questi insiemi, cioè infiniti x in cui la funzione assume il valore 1 ed infiniti x in cui la funzione assume il valore -1.
La nostra funzione è quindi limitata in qualunque intorno di 0, ma non è dotata di limite per x che tende a 0.

ATTIVITA' N. 2:

Calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

E' necessario fare attenzione alla digitazione della funzione: il numero e deve essere digitato premendo la lettera **<e>** contemporaneamente al tasto **<alt>**; solo in questo modo *DERIVE* interpreterà correttamente e attribuendole il noto valore. La lettera e apparirà sormontata da un accento circonflesso: **ê**.
Poiché l'editor di *DERIVE* è *di linea*, è necessario scrivere le parentesi anche dove non sono indicate: ad esempio il numeratore ed il denominatore dovranno essere chiusi tra parentesi e così anche l'esponente $2x$.
Si dovrà così digitare: **(2+ê^(2x))/(1+ê^(2x))** <↵>.
Selezionare **Calculus Limit**, premere <↵> per confermare la funzione ora digitata, premere ancora <↵> per confermare la variabile **x** e scrivere **+inf** nel campo **Point**, premere <↵> per confermare e infine selezionare **Simplify**.
Appare il risultato del limite cercato: **1**.

Calcoliamo manualmente il medesimo limite:
Sia il numeratore che il denominatore della funzione data tendono a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ [3]. Se dividiamo numeratore e denominatore per e^{2x}, otteniamo:

$$\frac{2/e^{2x}+1}{1/e^{2x}+1}$$

che, dato che $1/e^{2x}$ tende a 0 per x che tende a $+\infty$, converge ad 1.

ATTIVITA' N. 3:

Calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Conviene evidenziare con i tasti cursore la funzione prima digitata, selezionare **Calculus Limit** e, nel campo **Point** digitare **-inf**.
Selezionando **Simplify** si ottiene il risultato del limite cercato: **2**.

E' facile controllare manualmente il risultato ottenuto, osservando che e^{2x} tende a 0 per x che tende a $-\infty$.

---

[3] V. *G. C. Barozzi, Primo Corso di Analisi Matematica*, ed. Zanichelli, es. 3.7-1, pag. 219.

ATTIVITA' N. 4:

Calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{ax-1}{x}$.

Non si dimentichi di specificare, nel campo **variable**, che la variabile indipendente è x: come al solito *DERIVE* non fa distinzione tra parametri e variabili; è l'utente che deve stabilire i vari ruoli delle lettere che compaiono nelle espressioni digitate.
Si ottiene il risultato a, facilmente prevedibile anche manualmente, pensando che la funzione si può anche scrivere $a - 1/x$ e che $1/x$ tende a 0 per x che tende a ∞.
Ovviamente si sarebbe ottenuto lo stesso risultato con $x \to -\infty$.

Si noti che *DERIVE* è in grado di manipolare anche funzioni in cui compaiono altre variabili oltre alla variabile indipendente, di solito indicata con x.

ATTIVITA' N. 5:

Calcolare prima manualmente, poi con *DERIVE* i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a+e^{ax}}{1+e^{ax}} \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{a+e^{ax}}{1+e^{ax}}.$$

Il calcolo con *DERIVE* fornisce un risultato apparentemente strano: **?**. [4]
Come spiegare questa indecisione di *DERIVE*?

Selezionare **Declare Variable**, nel campo **name** scrivere **a** <↵> , poi, alla richiesta **DECLARE VARIABLE** selezionare **Real**, premere <↵> e infine selezionare **Positive**. Confermare con <↵>. [5]

Con questi comandi si specifica che la variabile **a** dovrà avere valori non negativi.
Ora, evidenziando con i tasti cursore il primo dei due limiti e selezionando **Simplify**, si ottiene il risultato **1**.

Ripetere la dichiarazione di variabile come indicato qui sopra, ma, invece di selezionare **Positive**, selezionare **Interval**.

Vengono così richiesti gli estremi (**Bounds**) dell'intervallo desiderato: digitare **-inf**, poi premere **<tab>** per passare al campo successivo, in cui si specifica se si desidera la disuguaglianza "stretta" o "larga", cioè la relazione < oppure ≤ (si passa dall'uno all'altro premendo **<spazio>**); premere ancora **<tab>** per passare alla successiva relazione (la variabile specificata **a** è già stata inserita automaticamente da *DERIVE*) e ancora **<tab>** per passare nell'ultimo campo in cui si specifica l'estremo superiore dell'intervallo; digitare **0**, controllare di aver specificato correttamente l'intervallo desiderato, cioè $]-\infty, 0]$ (i simboli di disuguaglianza selezionati appaiono chiusi tra parentesi) ed infine confermare con <↵>.

Evidenziare con i tasti cursore il primo dei due limiti proposti e selezionare **Simplify**.
Selezionare **Author** e digitare **a:=0** <↵>.
Evidenziare ancora con i tasti cursore il primo limite e selezionare **Simplify**.

---

[4] Ancora una volta, a seconda della versione di *DERIVE*, la risposta potrebbe essere diversa da quella qui indicata; le considerazioni successive rimangono comunque valide.

[5] Per le versioni di *DERIVE* precedenti la 3 il percorso di comandi da impartire è leggermente diverso: **Declare Variable**, **Domain**, **Positive**.

Ripetere le stesse azioni (**Declare Variable Real** ecc.) anche per il secondo dei limiti proposti.

Riassumendo, con $f(x) := \dfrac{a + e^{ax}}{1 + e^{ax}}$, abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } a > 0 \\ 1/2 \text{ , se } a = 0 \\ a \text{ , se } a < 0 \end{cases} \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} a \text{ , se } a > 0 \\ 1/2, \text{ se } a = 0 \\ 1 \text{ , se } a < 0. \end{cases}$$

Ricordarsi di "liberare" al termine di questa Attività la variabile **a** selezionando **Author** e digitando **a:=a** **<↵>**.

ATTIVITA' N. 6:

Determinare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim_{n \to +\infty} a^n$.

Anche in questo caso *DERIVE* si comporta in modo corretto: la risposta è ancora il punto interrogativo [6].

Usare il comando **Declare Variable**, **Real**, **Interval** visto nella precedente Attività per dichiarare che a appartiene all'intervallo $]0,1[$ e ricalcolare il limite proposto. [7]

Ricalcolare ancora il limite con $a \in \ ]1,+\infty[$ e con $a = 1$.

ATTIVITA' N. 7:

Calcolare con *DERIVE* il seguente limite: $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x}$.

E' ovvio che tale limite non esiste, dato che il dominio naturale della funzione è l'intervallo $[0,+\infty[$.

La risposta di *DERIVE* è 1/0 (v. Attività n. 8 della Scheda n. 10) [8]; anche questa volta la risposta va interpretata come un messaggio di non esistenza del limite, anche se per un motivo diverso da quello dell'esempio citato.

ATTIVITA' N. 8:

Per quale valore di k la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 3x - 1, \text{ per } x \geq 0 \\ 2x - k, \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$? [9]

Il punto $x = 0$ appartiene al dominio della funzione e questa assume in esso il valore -1; è

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -k,$$

quindi perché la funzione sia continua sia a sinistra che a destra in $x = 0$ occorre e basta che sia $-k = -1$, cioè $k = 1$.

Esaminiamo il grafico della funzione: questo è formato dall'unione tra la semiretta di equazione $y = 3x - 1$ (con $x \geq 0$) ed il fascio di semirette parallele di equazione $y = 2x - k$ (con $x < 0$).

---

6 Ancora una volta, a seconda della versione di *DERIVE,* la risposta potrebbe essere diversa da quella qui indicata; le considerazioni successive rimangono comunque valide.

7 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, paragrafo 2-3, pag. 119.

8 oppure $\hat{\imath} \cdot \infty$, a seconda della versione usata.

9 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 80, pag. 478.

Possiamo facilmente visualizzare la situazione con *DERIVE*: selezionare **Author** e digitare **f(x, k) := if(x < 0, 2x + k, 3x - 1)** <↵>.
Selezionare ancora **Author** e digitare **vector(f(x, k), k, -5, 5)** <↵> e poi **Simplify**. [10]
La funzione $f(x)$ è stata definita come funzione in due variabili: la variabile indipendente x ed il parametro k. [11]
Evidenziare il risultato ora ottenuto, selezionare **Plot** per passare all'ambiente di Grafica, poi selezionare ancora **Plot** per tracciarne il grafico.

ATTIVITA' N. 9:

Esiste un valore di m per cui la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 2x+2, \text{ per } -1 \le x < 0 \\ mx+1, \text{ per } x \ge 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$? [12]

L'esercizio è simile al precedente: il punto $x = 0$ appartiene al dominio della funzione e questa assume in esso il valore +1; è

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1 \text{ e } \lim_{x\to 0^-} f(x) = +2,$$

quindi, essendo questi risultati indipendenti dal parametro, per nessun valore di m il limite a destra e quello a sinistra della funzione data sono coincidenti: la funzione è continua a destra ma non a sinistra; il punto $x = 0$ è, come si suole dire, un *punto di discontinuità di prima specie*.

Anche in questo caso si consiglia di tracciare il grafico della funzione manualmente (si tratta del segmento di estremi $(-1, 0)$ e (0, 2), il secondo punto escluso, unito al fascio di semirette di centro (0,1)) oppure con *DERIVE*, seguendo le indicazioni della precedente Attività.
In particolare la funzione dovrà essere digitata come funzione in due variabili (perché dipende, oltre che da x, dal parametro m) usando l'opportuno connettivo logico:
f(x,m):= if(x>= -1 and x<0, 2x+2, mx+1) <↵>.

ATTIVITA' N. 10:

Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^k x}{x}$, $(k > 1)$. [13]

La funzione può essere presentata nella forma (grazie alla condizione $k > 1$)

$$\frac{\sin x}{x} \sin^{k-1} x.$$

Il limite del primo fattore è il noto "limite notevole" $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, mentre il secondo fattore tende a 0 per x che tende a 0, quindi il limite cercato è = 0.

Vogliamo esplorare il comportamento di *DERIVE* di fronte a questa funzione: selezionare **Author** e digitare la funzione data. [14]

---

[10] I valori suggeriti per la variazione di k, da **-5** a **5** a passi di 1, sono del tutto arbitrari.

[11] Ciò si rende necessario nelle versioni di *DERIVE* dalla 3.X in poi. Con le versioni precedenti era sufficiente la definizione: **f(x):= if(x < 0, 2x + k, 3x - 1)**.

[12] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit*., es. n. 81, pag. 478.

[13] V. *G. C. Barozzi*, *op. cit*., es. n. 93, pag. 478.

[14] Chi usa una versione di *DERIVE* dalla 2.08 in poi, potrà digitare la funzione $\sin^k x$ come si scrive manualmente, cioè **sin^k x**; chi usa una versione precedente dovrà invece scrivere il

Dare i comandi ormai ben noti per calcolarne il limite per x che tende a 0.
Questa volta *DERIVE* sembra rifiutarsi di eseguire il calcolo richiesto e restituisce la stessa espressione che doveva "semplificare" [15]. Ciò è dovuto alla mancanza di informazioni sul parametro *k*. Contrariamente all'esempio visto nell'Attività n. 5, questa volta non basta dichiarare l'intervallo di variazione della variabile *k*, ma sarà necessario assegnare esplicitamente i valori di *k*: selezionare **Author** e digitare, ad esempio, **k:=2** <↵>, poi selezionare **Simplify**; si ottiene così il valore previsto (v. anche Scheda n. 1, Attività 2).

Si può anche usare, invece di una assegnazione esplicita, il comando **Manage Substitute** per realizzare una "assegnazione locale": evidenziare il limite già digitato, selezionare **Manage Substitute**, premere <↵> per confermare di voler operare sull'espressione evidenziata; nel campo **value** *DERIVE* propone **x**; premere <↵> per non assegnare alcun valore alla variabile; successivamente nel campo **value** appare l'altra variabile, **k**: digitare al suo posto il valore desiderato (in questo caso, ad esempio, **2**). Premere <↵>. L'espressione appare con il valore specificato al posto della variabile indicata. Selezionare **Simplify** per ottenere il risultato desiderato.

Calcolare il limite della funzione data per x che tende a 0 assegnando a *k*, l'uno dopo l'altro, i seguenti valori: $3, 0, -1, 1/2, -1/2, -2$.

Se necessario calcolare separatamente il limite a destra e quello a sinistra; si ricordi che *DERIVE* nel caso di non esistenza del limite non dà un messaggio di errore ma fornisce risultati "anomali", in varie forme; alcune di queste sono elencate all'inizio della SINTESI di questa stessa scheda.

ATTIVITA' N. 11:

Calcolare manualmente i seguenti limiti e verificare con *DERIVE* i risultati ottenuti: [16]

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{2\sqrt{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x+3\sin x}{3x+4\sin x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x/2)}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln\sin 3x - \ln 2x)$.

a) In questo, come negli altri esercizi di questa Attività, la strategia di calcolo sarà quella di trasformare la funzione in un'altra equivalente nella quale compaia $\sin x/x$ il cui limite è dato per noto a priori, per x che tende a 0.

$\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sin x}{2\sqrt{x}} =$, semplificando e razionalizzando, $= \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\dfrac{\sin x}{x}$.

Passando al limite per $x \to 0^+$ e ricordando, tra l'altro, che $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, si ottiene il risultato $\dfrac{1}{2}$.

Cosa sarebbe successo se avessimo cercato il limite della stessa funzione per $x \to 0^-$?

b) Basterà dividere numeratore e denominatore per x:

$$\frac{2x+3\sin x}{3x+4\sin x} = \frac{2+3(\sin x)/x}{3+4(\sin x)/x},$$

questo modo: **(sin x)^k**.

[15] oppure, a seconda della versione, risponde con il solito punto interrogativo.

[16] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, pag. 478.

da cui si ottiene il risultato 5/7.

c) Moltiplichiamo e dividiamo il denominatore per 4:

$$\frac{\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 .$$

Ponendo $x/2 = t$, l'espressione tra parentesi diventa $\sin t/t$.
Si noti che $x \to 0 \iff \frac{x}{2} = t \to 0$.
Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{4}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

d) Utilizzando le proprietà dei logaritmi (v. pag. 127 del Testo di riferimento) e moltiplicando numeratore e denominatore per 3/2, si ha:

$$\ln\ \sin(3x) - \ln(2x) = \ln\frac{\sin 3x}{2x} = \ln\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{3x} = \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{\sin 3x}{3x}.$$

Poiché $\sin 3x/3x$ tende ad 1 per x che tende a 0 (per gli stessi motivi visti nel caso c), e ln1= 0, il risultato del limite proposto è ln(3/2).

✍ ATTIVITA' N. 12:

Utilizzando i "limiti notevoli" $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, calcolare i seguenti limiti verificando con *DERIVE* i risultati ottenuti: [17]

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

a) Dovremo operare opportune trasformazioni della funzione data e sostituzioni di variabile per ricondurre il calcolo del limite dato a quello di uno dei limiti notevoli citati.
Poniamo $-2x = t$ che equivale a $x = -t/2$ e osserviamo che, se $x \to \infty$, indipendentemente dal segno, anche $t \to \propto$ indipendentemente dal segno.

$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t/2} = \frac{1}{\sqrt{(1+1/t)^t}}.$$

Quindi il limite cercato è $e^{-1/2}$ o, che è la stessa cosa, $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

b) Cominciamo con l'osservare che

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{bx}$$

che a sua volta è uguale, moltiplicando e dividendo l'esponente per a,

$$= \left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{ab(x/a)} = \left[\left(1+\frac{1}{x/a}\right)^{x/a}\right]^{ab}.$$

Ponendo $x/a = t$ ed osservando che se x tende a $\pm\infty$, anche t tende allo stesso limite, il limite cercato sarà uguale a

---

[17] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, pagg. 479 e 480.

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{ab}=e^{ab}.$$

c) Poniamo $t = 1/x$ e osserviamo che, se x tende a 0, t tende a $\pm\infty$. Perciò

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

d) Poiché $\operatorname{cosec}x = 1/\sin x$, se poniamo $\sin x = z$ e osserviamo che $\sin x$ tende a 0 al tendere di x a 0, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}$$

che, a parte il nome utilizzato per la variabile, è lo stesso limite già visto nell'esercizio c) e quindi converge ad e.

e) Poniamo $2^x=t$ che equivale a $x = \log_2 t = \ln t/\ln 2$ (v. paragrafo 2.3 del Testo di riferimento). Avremo così, osservando che 2^x tende a 1 per x che tende a 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\frac{\ln t}{\ln 2}}=\ln 2\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}.$$

Calcoliamo il nuovo limite ora ottenuto: poniamo $t-1=z$, che equivale a $t = z + 1$ e osserviamo che, per t che tende a 1, z tende a 0:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\ln t}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\ln(z+1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\ln(z+1)/z}=1.$$

Quindi il limite cercato è ln2.

f) Aggiungiamo e togliamo 1 al numeratore:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\left(\frac{(x-1)+2}{x-1}\right)^x=\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x.$$

Poniamo $x-1=t$, che equivale a $x=t+1$, e osserviamo che t tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$; avremo così:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right)^t\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{2}{t}\right).$$

Il primo limite equivale all'esercizio c) prima svolto con $a = 2$ e $b = 1$ e quindi è uguale a e^2; il secondo limite è uguale a 1. Quindi il limite cercato è $= e^2$.

ATTIVITA' N. 13:

Verificare che il polinomio $p(x) := x^5 - 3x - 1$ ammette almeno uno zero compreso tra 0 e 2. [18]

Poiché (v. Lemma a pag. 229 del Testo di riferimento) una funzione continua su un intervallo non può passare da valori negativi a valori positivi senza annullarsi almeno in un punto, e dato che la nostra funzione polinomiale è indubbiamente continua, basterà verificare che $p(0)$ e $p(2)$ sono discordi; infatti: $p(0) = -1$, $p(2) = 25$.

Si può usare *DERIVE* per avere un valore almeno approssimato dello zero compreso tra 0 e 2, la cui esistenza è stata ora provata.

Selezionare **Author** e digitare il polinomio dato.

Come si è visto nella Scheda n. 0, selezionando **soLve** ci si aspetta di ottenere le soluzioni dell'equazione ottenuta uguagliando a 0 il polinomio dato. Questa volta però *DERIVE* sembra piantarci in asso: risponde riproponendoci la stessa equazione [19].

---

18 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 177 pag. 480.

Anche questa volta *DERIVE* ha i suoi buoni motivi per darci questa risposta: il matematico francese Evariste Galois dimostrò nel 1832 che non è possibile ottenere una formula per risolvere una equazione generale di grado maggiore di 4 usando le quattro operazioni e l'estrazione di radice. Esistono però algoritmi per determinare il valore approssimato di queste soluzioni e *DERIVE* è in grado di utilizzarli; se ne parlerà più in dettaglio in una prossima Scheda.
Selezionare **Options Precision Approximate**, poi, dopo aver evidenziato con i tasti cursore il nostro polinomio, selezionare ancora **soLve**.
Compare un nuovo menu: nel campo **Lower** scrivere 0, nel campo **Upper** scrivere 2: si noti che abbiamo inserito proprio i valori dell'intervallo proposto dall'esercizio; premere <↵> per confermare. Appare lo zero cercato: **1.38879....** (si ricordi che il numero delle cifre decimali calcolate può essere modificato con il comando **Options Precision Digits**).

Determinare gli altri zeri reali del polinomio dato modificando gli estremi dell'intervallo da considerare; può essere di aiuto far tracciare a *DERIVE* il grafico della funzione polinomiale data.

Per finire si noti che l'essere $p(a)$ e $p(b)$ discordi è condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza di almeno uno zero nell'intervallo $]a, b[$: infatti, ad esempio, $p(-1)$ e $p(2)$ sono concordi pur esistendo due zeri nell'intervallo $]-1, 2[$.

[19] supponendo di operare in modalità **Exact**, come sempre in tutte le altre Attività.

SINTESI

SE *DERIVE* RISPONDE IN MODO AMBIGUO ALLA RICHIESTA DI CALCOLO DI UN LIMITE (ad esempio ±∞, **1/0**, **?**, **sin(∞)**, **î.**∞, oppure in qualche caso **sign(0)** o **unit_circle**· ∞), può significare che il limite richiesto non esiste oppure che sono necessarie ulteriori informazioni sulla funzione (ad esempio occorre specificare il valore di un parametro) oppure è necessario precisare se si desidera calcolare il limite da destra o da sinistra.

<u>MENU</u>

Il comando **Manage Substitute** serve per sostituire un valore (o una espressione) ad una variabile o ad una "sottoespressione". Se è evidenziata l'intera espressione, nal campo **value** vengono proposte, l'una dopo l'altra, tutte le variabili presenti nell'espressione stessa.
Digitare il valore o l'espressione che si vuole sostituire al posto della variabile proposta e premere <↵>. Se una variabile non deve essere sostituita, premere <↵> senza digitare nulla.
Se è evidenziata solo una parte dell'espressione, la sostituzione ha effetto solo su di essa e non sull'intera espressione.
Sostituendo un valore numerico ad una variabile con questo comando, l'assegnazione ha effetto solo sull'espressione su cui si agisce; l'assegnazione effettuata con il simbolo **:=** ha invece un effetto permanente durante l'intera sessione di lavoro, fino ad una successiva assegnazione.

Per specificare l'intervallo di variazione di una variabile: **Declare Variable Name**, specificare il nome della variabile seguito da <↵>, poi selezionare **Domain Interval**.
Vengono richiesti gli estremi (**Bounds**) dell'intervallo desiderato: digitare il primo valore, poi premere **<tab>** per passare al campo successivo, in cui si specifica se si desidera la relazione < oppure ≤ (si passa dall'uno all'altro premendo **<spazio>**); premere ancora **<tab>** per passare alla successiva relazione (la variabile specificata è già stata inserita automaticamente da *DERIVE*) e ancora **<tab>** per passare nell'ultimo campo in cui si specifica il secondo estremo dell'intervallo; digitare il valore desiderato, controllare di aver specificato correttamente l'intervallo, (i simboli di disuguaglianza selezionati appaiono chiusi tra parentesi) ed infine confermare con <↵>.

Per ottenere gli zeri (approssimati) di una funzione polinomiale di grado >4, selezionare **Options Precision Approximate**. Selezionando **SoLve** vengono richiesti gli estremi **Lower** ed **Upper** dell'intervallo all'interno del quale si vuole determinare lo zero della funzione. Se nell'intervallo specificato non esiste alcuno zero della funzione, nella prima linea in basso compare il messaggio **No solutions found**.