# Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
# Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio

SCHEDA N. 12

**ARGOMENTO:** Il rapporto incrementale. La derivata come limite del rapporto incrementale. Derivazione di funzioni composte.

**(LEZIONI n. 15 e 16)**

ATTIVITA' N. 1:

Per le seguenti funzioni polinomiali calcolare il rapporto incrementale $\dfrac{p(x)-p(x_0)}{x-x_0}$ nel punto $x_0$ specificato e calcolare la derivata in $x_0$ come limite del rapporto incrementale, con [1]

a) $p(x) := 3x^2 - 2x + 3, \quad x_0 = 2$; b) $p(x) := 2x^3 + x^2 - 3x + 2, \quad x_0 = 1$.

a) E' $p(x_0) = p(2) = 11$. Quindi il rapporto incrementale è

$$\frac{(3x^2-2x+3)-11}{x-2} = \frac{3x^2-2x-8}{x-2} = \frac{(3x+4)(x-2)}{x-2} = 3x+4.$$

La derivata calcolata nel punto $x = 2$ è:

$$\lim_{x\to 2}(3x+4) = 10.$$

b) E' $p(x_0) = p(1) = 2$. Quindi il rapporto incrementale è

$$\frac{(2x^3+x^2-3x+2)-2}{x-1} = \frac{2x^3+x^2-3x}{x-1}.$$

Semplificando, la frazione è uguale a: $2x^2+3x$.

La derivata calcolata nel punto $x = 1$ è:

$$\lim_{x\to 1}\left(2x^2+3x\right) = 5.$$

Si ricordi (v. Scheda n. 7, Attività n. 4) che un modo efficiente per calcolare il valore corrispondente ad $x_0$ in una funzione polinomiale, consiste nell'usare lo schema di Horner, cioè nell'applicare la regola di Ruffini per la divisione tra il polinomio dato e il binomio $(x-x_0)$: il resto della divisione è il valore cercato.

ATTIVITA' N. 2:

Nella funzione polinomiale $p(x) := x^2 - 3x + 2$ determinare il punto $x_0$ in cui la derivata assume il valore 3.

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{x^2-3x+2-(x_0^2-3x_0+2)}{x-x_0} = \frac{(x^2-x_0^2)-3(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)[(x+x_0)-3]}{x-x_0} = x+x_0-3.$$

La derivata della funzione nel punto $x_0$ sarà quindi, calcolando il limite per $x$ che tende ad $x_0$

$$2x_0 - 3.$$

Se si desidera che la derivata nel punto $x_0$ assuma il valore 3, dovrà essere

---

[1] Questi esercizi e la maggior parte dei seguenti, sono tratti da *G. C. Barozzi, Primo Corso di Analisi Matematica*, ed. Zanichelli, pag. 481 e segg..

$$2x_0 - 3 = 3,$$

da cui si ottiene $x_0 = 3$.

ATTIVITA' N. 3:

Calcolare come limite del rapporto incrementale la derivata delle seguenti funzioni:

a) $f(x) := \dfrac{x}{x+1}$, b) $f(x) := \sqrt{2x+1}$ , c) $f(x) := \sqrt[3]{x}$ .

a) Usseremo per il rapporto incrementale la forma

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Riducendo allo stesso denominatore, eseguendo i calcoli e semplificando, si ha:

$$\frac{(x+h)/\ (x+h+1) - x/(x+1)}{h} = \frac{1}{h}\,\frac{(x+1)(x+h)-x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{1}{h}\,\frac{x^2+hx+x+h-x^2-hx-x}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{h}\,\frac{h}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+h+1)(x+1)}.$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

b) Calcoliamo il rapporto incrementale, moltiplichiamo sia il numeratore che il denominatore per $\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}$ e facciamo le opportune semplificazioni:

$$\frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} = \frac{2x+2h+1-2x-1}{h\left(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}.$$

Passando al limite con $h \to 0$ si ha:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

c) Dopo aver scritto il rapporto incrementale, moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}$ per poter utilizzare il noto prodotto notevole: $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ e infine semplifichiamo.

$$\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

ATTIVITA' N. 4:

In questa Attività si vuole calcolare con *DERIVE* la derivata della funzione $f(x) := \sqrt{x}$ , prima come limite del rapporto incrementale per $h \to 0$, poi direttamente utilizzando i teoremi sulla derivata.

Questo limite può essere calcolato direttamente, tuttavia sceglieremo di definire la funzione $f(x)$: selezionare **Author** e digitare **f(x) := √x** <↵>.

Si ricordi che il simbolo √ è ottenibile premendo **<alt>** + **<q>**.

Selezionare ancora **Author** e digitare l'espressione del rapporto incrementale della funzione $f(x)$: **(f(x+h)-f(x))/h** <↵>, poi selezionare **Simplify**.

Appare il rapporto incrementale della funzione prima definita.

Selezionare **Calculus Limit**, premere <↵> per confermare l'espressione evidenziata, digitare **h** <↵> nel campo **variable**, digitare **0** <↵> nel campo **Point**, premere <↵> per confermare. Selezionare **Simplify**.

Appare il limite del rapporto incrementale $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Evidenziare la funzione **√x** presa in esame, selezionare **Calculus Differentiate**, premere <↵> per confermare di voler operare con la funzione evidenziata, digitare **x** <↵> nel campo **variable**, premere <↵> per confermare il valore **1**, proposto nel campo **Order**.

Appare il noto simbolo di Leibniz $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}$ seguito dalla funzione presa in esame.

Selezionare **Simplify**.

Appare la derivata della funzione.

Naturalmente la stessa procedura può essere seguita per calcolare la derivata di qualunque altra funzione, oltre a quella proposta in questa Attività.

<u>ATTIVITA' N. 5:</u>

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni utilizzando i teoremi sulla derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni [2] e si verifichi il risultato con *DERIVE*:

a) $y = 2x^4 - 4x^3 + 4x - 5$, b) $y = 2x^2\sqrt{x}$,

c) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+1}$, $x \neq 1$, d) $y = \ln x^3$,

e) $y = \sin^2 x$, f) $y = xe^x$.

a) Utilizzando la Proposizione 4.2-1 a pag. 243 del Testo di riferimento e la formula $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$, si ottiene:

$$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 1 = 8x^3 - 12x^2 + 4.$$

b) Utilizzando la Proposizione 4.2-2 a pag. 244 del Testo di riferimento e la formula $\mathrm{D}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, razionalizzando e semplificando, si ottiene:

$$f'(x) = 4x \cdot \sqrt{x} + 2x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 4x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = 5x\sqrt{x}\,.$$

c) Utilizzando il Corollario della Proposizione 4.2-3 a pag. 244 del Testo di riferimento, si ha:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{D}(x^2 - 2x) \cdot (x+1) - (x^2 - 2x) \cdot \mathrm{D}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x) \cdot 1}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}.$$

d) Poiché, per le note proprietà dei logaritmi, $\ln x^3 = 3\ln x$,e dato che $\mathrm{D}\ln x = \dfrac{1}{x}$, si ha: $f'(x) = \dfrac{3}{x}$.

---

[2] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, paragrafi 4.1 e 4.2 .

e) Se scriviamo la funzione data come prodotto tra sin$x$ e sin$x$, ricordando che Dsin$x$ = = cos$x$ e la nota formula di duplicazione della funzione seno [3], otteniamo:
$f'(x) = \mathrm{D}\sin x \cdot \sin x + \sin x \cdot \mathrm{D}\sin x = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$.

f) Ricordando che D$e^x$ = $e^x$, si ha: $f'(x) = \mathrm{D}x \cdot e^x + x \cdot \mathrm{D}e^x = e^x + xe^x = e^x(1+x)$.

ATTIVITA' N. 6:
Calcolare l'insieme naturale di definizione e le derivate delle seguenti funzioni utilizzando i teoremi sulla derivazione delle funzioni composte; [4] si verifichi il risultato con *DERIVE*:

a) $y = \sqrt{x^2+1}$, b) $y = \ln(\sin x)$,
c) $y = \sin(\ln x)$ d) $y = \sin(2x^3 + x + 1)$,
e) $y = \sqrt[4]{\ln(4x^2 - 3x)}$, f) $y = e^{\sin x}$,
g) $y = 3^{x^2}$, h) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$,
i) $y = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$. l) $y = \dfrac{\sin x \cos x}{e^x}$.

a) La funzione è definita per ogni $x$ reale.
Poiché questa funzione e tutte le successive sono funzioni composte, può essere utile costruire la concatenazione di funzioni elementari la cui composizione dà origine alla funzione data:

$$x \to \boxed{(\bullet)^2 + 1} \to x^2 + 1 \to \boxed{\sqrt{\bullet}} \to \sqrt{(x^2+1)}\ .$$

Il "pallino" $\bullet$ rappresenta l'argomento della funzione elementare presa in considerazione. La precedente scrittura si può quindi leggere così: il corrispondente di $x$ è dato dal suo quadrato aumentato di 1; del risultato ottenuto si deve poi calcolare la radice quadrata.
Utilizzando la Proposizione 4.6 si ottiene così:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

b) La funzione è definita per sin$x$ > 0, cioè per $x \in \ ]2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in Z$.

$$x \to \boxed{\sin(\bullet)} \to \sin x \to \boxed{\ln(\bullet)} \to \ln \sin x.$$

Quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{cotg} x\ .$$

c) La funzione è definita per $x$ > 0.

$$x \to \boxed{\ln(\bullet)} \to \ln x \to \boxed{\sin(\bullet)} \to \sin \ln x.$$

Quindi:

$$f'(x) = \cos \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

Si noti che il risultato è diverso da quello ottenuto nell'esempio precedente, conseguenza della non commutatività della composizione di funzioni.

d) La funzione è definita per ogni $x$ reale.

---

3 V. es. 2.4-2 a pag. 157 del Testo di riferimento
4 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, paragrafo 4.3.

$$x \to \boxed{2(\bullet)^3+(\bullet)+1} \to 2x^3+x+1 \to \boxed{\sin(\bullet)} \to \sin(2x^3+x+1).$$

Quindi:

$$f'(x)=\cos(2x^3+x+1)\cdot(6x^2+1).$$

e) La funzione è definita per ogni $x$ tale che

$$\begin{cases} \ln(4x^2-3x)\ge 0 \\ 4x^2-3x>0 \end{cases} \quad \text{che equivale a} \quad \begin{cases} 4x^2-3x\ge 1 \\ 4x^2-3x>0 \end{cases}.$$

Basterà ovviamente considerare la condizione più restrittiva delle due:
$4x^2 - 3x - 1 \ge 0$, da cui: $x \le -1/4$ , oppure $x \ge 1$.

$$x \to \boxed{4(\bullet)^2-3(\bullet)} \to 4x^2-3x \to \boxed{\ln(\bullet)} \to \ln(4x^2-3x) \to \boxed{\sqrt[4]{\bullet}} \to \sqrt[4]{\ln(4x^2-3x)}.$$

Ricordando che $D\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, si ottiene:

$$f'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{\left(\ln(4x^2-3x)\right)^3}}\cdot\frac{1}{4x^2-3x}\cdot(8x-3).$$

f) La funzione è definita per ogni $x$ reale.

$$x \to \boxed{\sin(\bullet)} \to \sin x \to \boxed{e^{(\bullet)}} \to e^{\sin x}.$$

Ricordando che $De^x = e^x$ si ha:

$$f'(x)=e^{\sin x}\cos x .$$

g) La funzione è definita per ogni $x$ reale.

$$x \to \boxed{(\bullet)^2} \to x^2 \to \boxed{3^{(\bullet)}} \to 3^{x^2}.$$

Ricordando che $Da^x = a^x \ln a$ si ha:

$$f'(x)=3^{x^2}\ln 3\cdot 2x .$$

h) La funzione è definita per $\dfrac{x}{x-1}\ge 0$, cioè per $x\le 0$, $x>1$.

$$x \to \boxed{\frac{(\bullet)}{(\bullet)-1}} \to \frac{x}{x-1} \to \boxed{\sqrt{\bullet}} \to \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Poiché $D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ si ha:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x/(x-1)}}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

i) La funzione è definita per $\dfrac{1-x}{1+x}>0$, cioè per $-1<x<1$.

$$x \to \boxed{\frac{1-(\bullet)}{1+(\bullet)}} \to \frac{1-x}{1+x} \to \boxed{\ln(\bullet)} \to \ln\frac{1-x}{1+x}.$$

Si ottiene così:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)/(1+x)}\cdot\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{-2}{1-x^2}.$$

l) La funzione è definita per ogni $x$ reale.
Calcoliamo separatamente la derivata del numeratore:
$D(\sin x\cos x) = D\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot D\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x.$

Avremo così:

$$f'(x) = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot e^x - \sin x \cos x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x \cos x}{e^x}.$$

Calcolando la derivata con *DERIVE* è possibile che il risultato apparentemente non corrisponda a quello calcolato manualmente: questo è probabile soprattutto quando nella funzione compaiono radicali o funzioni circolari (v. esempi h ed l).
Di norma bastano alcuni facili passaggi, effettuando se necessario opportune razionalizzazioni o applicando le appropriate formule trigonometriche, per ottenere lo stesso risultato.
In particolare è possibile influire sul comportamento di *DERIVE* nella manipolazione di espressioni trigonometriche con il comando **Manage Trigonometry**.
Se nel campo **Direction** si seleziona **Collect**, dando il comando **Simplify** l'espressione trigonometrica viene trasformata usando, se necessario, le formule di somma, sottrazione, duplicazione ecc.; selezionando **Expand** vengono usate le formule inverse.
Ad esempio se si digita l'espressione **2sinx cosx** e si seleziona **Collect**, al comando **Simplify** *DERIVE* risponde scrivendo **sin2x**; se invece si digita l'espressione **cos(2x)** e si seleziona **Expand**, al comando **Simplify** *DERIVE* risponde scrivendo **(cosx)^2-(sinx)^2**.

**SINTESI**

**MENU**

Per calcolare la derivata di una funzione presente nello schermo di Algebra: evidenziarla, se necessario muovendo i tasti cursore, selezionare **Calculus Differentiate**, premere <↵> per confermare di voler operare con la funzione evidenziata, nel campo **variable** digitare l'identificatore della variabile indipendente della funzione, (di solito **x)** e premere <↵>, premere <↵> per confermare il valore **1**, proposto nel campo **Order**.
Appare la funzione considerata preceduta dal simbolo di Leibniz **d/dx**.
Selezionare **Simplify**. Appare la derivata della funzione.

Per influire sul comportamento di *DERIVE* nella manipolazione di espressioni trigonometriche, selezionare **Manage Trigonometry**.
Se nel campo **Direction** si seleziona **Collect**, con il comando **Simplify** l'espressione trigonometrica viene trasformata usando, se necessario, le formule di somma, sottrazione, duplicazione ecc.; selezionando **Expand** vengono usate le formule inverse.