Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 14

ARGOMENTO: Ancora sulla derivata a destra e a sinistra. Problemi di massimo e minimo. Creazione di una libreria di funzioni per *DERIVE*.

(LEZIONI n. 15 e 18)

ATTIVITA' N. 1:

Dimostrare che la funzione $y = \sqrt{\sin^2 x}$ è continua ma non derivabile nell'origine. [1]

La funzione è uguale a sin x, se sin $x \geq 0$, cioè se $0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$; è invece uguale a $-$sin x se sin $x < 0$, cioè se $\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$ è può anche essere espressa nella forma $y = |\sin x|$.

E' $\lim_{x \to 0} |\sin x| = 0$, quindi la funzione è continua nell'origine.

E' $f_-'(0) = \cos 0 = 1$, $f_+'(0) = -\cos 0 = -1$, quindi, dato che la derivata a destra e quella a sinistra nell'origine esistono ma non sono coincidenti (v. Proposizione 4.1-2 a pag. 242 del Testo di riferimento), la funzione data non è derivabile nell'origine.

La situazione è chiaramente visibile tracciando il grafico della funzione data (v. Scheda n. 6, Attività n. 8): la pendenza della retta tangente nell'origine al grafico della funzione situato nel semipiano $x > 0$ e quella della retta tangente al grafico situato nel semipiano $x < 0$, sono diverse.

ATTIVITA' N. 2:

In questa Attività si calcolerà con *DERIVE* la derivata a destra ed a sinistra di una data funzione in un punto specificato.

Se si cerca di determinare con *DERIVE* la derivata nell'origine della funzione che abbiamo appena visto, seguendo le indicazioni dell'Attività n. 2 della Scheda n. 13, si ottiene il risultato **sign(0)** [2]: come si è detto al termine di quella Attività, tale espressione per *DERIVE* è priva di significato; la cosa è giustificata dal fatto che la derivata della nostra funzione non esiste nell'origine.

Poiché *DERIVE* non possiede una funzione predefinita per calcolare la derivata a destra o a sinistra di una funzione in un punto, bisogna ricorrere, in base alla definizione, al limite a destra o a sinistra del rapporto incrementale.

La cosa può essere fatta da menu, ma in questa sede preferiremo creare due nuove funzioni per risolvere il problema.

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=** <↵>.
Selezionare ancora **Author** e digitare **der_sin(a):=lim((f(x)-f(a))/(x-a),x,a,-1)** <↵>.

dersin

---

[1] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, es. n. 190, pag. 485.

[2] oppure ± 1, a seconda della versione di *DERIVE*.

L'espressione a secondo membro rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione **f(x)** per **x** che tende ad **a**; l'ultimo argomento, **-1**, indica che si desidera il limite a sinistra.
E' necessario <u>prima</u> definire separatamente la funzione $f\ (x)$; purtroppo *DERIVE* non permette di usare direttamente funzioni come argomento di nuove funzioni definite dall'utente, quindi non è possibile dare alla funzione **der_sin** come argomenti sia la funzione $f\ (x)$ che l'ascissa del punto in cui si vuole calcolare la derivata. Se poi la funzione $f\ (x)$ non fosse già stata definita, *DERIVE* interpreterebbe il simbolo **f(x)** come prodotto tra le variabili **f** ed **x**. E' però possibile "prenotare" l'identificatore di funzione **f** con una "assegnazione vuota" come **f(x):=**. [3]

Selezionare ancora **Author** e digitare **der_des(a):=lim((f(x)-f(a))/(x-a),x,a,1) <↵>**.
L'ultimo argomento, **1**, indica che si desidera il limite del rapporto incrementale per **x** che tende ad **a** a destra.

Selezionare **Transfer Save DERIVE** e nel campo **file** digitare, ad esempio, **dersin.mth <↵>**.
Le funzioni ora definite saranno registrate sul disco attivo come file. In qualunque momento, anche in successive sessioni di lavoro, potranno essere disponibili con il comando **Transfer Load Utility**: abbiamo così creato una nostra piccola libreria di funzioni, simile alle già note **misc.mth** e **dif_apps.mth**. [4]

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=abs(sin x) <↵>**.
Si sarebbe anche potuto digitare **f(x):= √(sin x)^2**: *DERIVE* lo semplifica correttamente in $|\sin x|$. [5]
Selezionare **Author**, digitare **der_sin(0) <↵>**, selezionare **Simplify**.
Selezionare **Author**, digitare **der_des(0) <↵>**, selezionare **Simplify**.
Si ottengono i risultati già visti nell'Attività n. 1.

<u>ATTIVITA' N. 3:</u>
Studiare i punti di non derivabilità della funzione $f(x) := |x^2 - 4|$. [6]
E' $x^2 - 4 \geq 0$ per $x \in\ ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, $x^2 - 4 < 0$ per $x \in\ ]-2, 2[$.
La funzione data può quindi essere espressa nella forma:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 - 4, & x \in\ ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\\ 4 - x^2, & x \in\ ]-2, 2[\,. \end{cases}$$

Può essere utile tracciare il grafico della funzione.
I punti di non derivabilità sono $x = -2$ e $x = 2$. Infatti:

$$f\,'_-(-2) = 2(-2) = -4; \quad f\,'_+(-2) = -2(-2) = 4.$$
$$f\,'_-(+2) = -2(+2) = -4; \quad f\,'_+(+2) = 2(+2) = 4.$$

Si noti che anche in questo caso la funzione è continua ma non derivabile in quei punti.

---

[3] Grazie al modo usato da *DERIVE* per calcolare il limite di una funzione (in pratica una variante del comando **Manage Substitute**), l'uso "ingenuo" che qui è stato fatto del rapporto incrementale non è molto pericoloso dal punto di vista degli errori di cancellazione, sempre in agguato quando si opera con un elaboratore.
[4] V. Schede n. 3 e n. 13.
[5] Si ricordi che il simbolo √ si ottiene premendo **<alt>** + **q**. Gli utenti di versioni di *DERIVE* posteriori alla 2.08 potranno anche scrivere **sin^2 x**.
[6] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 192, pag. 485.

ATTIVITA' N. 4:

Studiare i punti di non derivabilità della seguente funzione [7]: $f(x) := e^{\left|x^2-1\right|}$.

E' $x^2-1 \geq 0$ per $x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, quindi la funzione può essere espressa nella forma:

$$f(x) := \begin{cases} e^{x^2-1}, \text{ se } x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ e^{1-x^2}, \text{ se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\, e^{x^2-1}, \text{ se } x < -1 \text{ oppure } x > 1 \\ -2x\, e^{1-x^2}, \text{ se } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Si ha:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x\, e^{x^2-1} = -2; \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} -2x\, e^{1-x^2} = +2;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -2x\, e^{1-x^2} = -2; \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x\, e^{x^2-1} = +2.$$

Quindi la funzione data ha due punti di non derivabilità: $x = -1$ e $x = 1$.

ATTIVITA' N. 5:

Si considerino i cilindri circolari retti inscritti in un cono circolare retto con raggio di base r e altezza h; determinare il cilindro di volume massimo e quello di area laterale massima. [8]

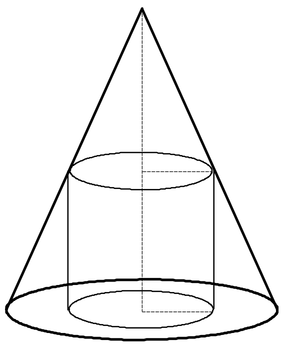

Fig. 1

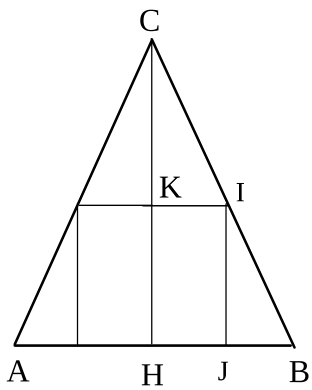

Fig. 2

La *Fig.* 2 mostra la sezione dei solidi con un piano passante per il loro asse di rotazione.

Se indichiamo con x la misura del raggio HJ = KI del cilindro inscritto, è JB = $r - x$.

Osservando la similitudine tra i triangoli CBH e IJB, si ha la proporzione

HB : JB = CH : IJ

da cui la misura dell'altezza del cilindro risulta essere

$$\text{IJ} = \frac{\text{JB} \cdot \text{CH}}{\text{HB}} = \frac{(r-x)h}{r}.$$

Esprimendo il volume del cilindro in funzione di x si ha:

$$V(x) = \pi x^2 \frac{(r-x)h}{r} = \frac{\pi h}{r}\left(rx^2 - x^3\right),$$

con $0 \leq x \leq r$.

---

[7] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 195, pag. 485.

[8] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 4.4-6, pag. 260.

$$V'(x) = \frac{\pi h}{r}\left(2rx - 3x^2\right).$$

La funzione $V(x)$ è continua sull'intervallo chiuso $[0, r]$, quindi per il noto teorema di Weierstrass è dotata di massimo e di minimo.
Si noti anche che la funzione $V(x)$ è senza dubbio non negativa nell'intervallo considerato.
$V'(x) = 0$ per $x = 0$ oppure per $x = 2/3\, r$.
Evidentemente la soluzione $x = 0$ corrisponde ad un cilindro "degenere" che coincide con il segmento CH; questo cilindro ha ovviamente volume nullo.
Per $x = 2/3\, r$ il cilindro assume il volume massimo 4/27 phr^2.

Analogamente, esprimendo l'area laterale del cilindro in funzione di x, si ha:

$$A(x) = 2\pi x\frac{(r-x)h}{r} = \frac{2\pi h}{r}\left(rx - x^2\right), \text{ con } 0 \le x \le r.$$

$$A'(x) = \frac{2\pi h}{r}(r - 2x).$$

Per $x = r/2$ il cilindro assume l'area laterale massima 1/2 phr.

ATTIVITA' N. 6:
Da un cerchio di carta di raggio r si ritaglia un settore circolare e con il settore residuo si forma un cono facendo combaciare i due raggi. Qual'è l'apertura del settore da utilizzare se si vuole ottenere un cono di volume massimo? [9]

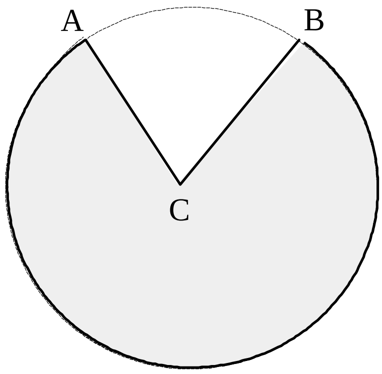

Fig. 3

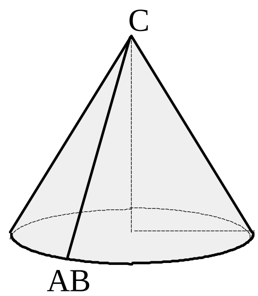

Fig. 4

Se indichiamo con x l'apertura del settore circolare da utilizzare per ottenere il cono, misurato in radianti [10], la misura dell'arco corrispondente è rx. Questa sarà anche la misura della lunghezza della circonferenza di base del cono.
Il raggio di base del cono si potrà ottenere dividendo la lunghezza della circonferenza di base per 2π; si ottiene così la misura $\frac{rx}{2\pi}$.
L'apotema del cono è uguale al raggio del cerchio da cui è stato tratto il settore circolare, quindi l'altezza del cono può essere trovata con l'applicazione del Teorema di Pitagora:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}\,.$$

---

[9] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. 228 pag. 488.
[10] V. pag. 144 del Testo di riferimento.

L'area di base del cono è $\pi\left(\frac{rx}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^2}{4\pi}x^2$.

Il volume del cono, in funzione di x, è data da 1/3 dell'area di base moltiplicata per l'altezza:

$$V(x) = \frac{1}{3}\frac{r^2}{4\pi}x^2\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{r^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}\text{ , con } 0 \le x \le 2p.$$

Tale funzione è non negativa e continua nell'intervallo specificato quindi, ancora per il Teorema di Weierstrass, è dotata di massimo e minimo.

Si ottiene

$$V'(x) = \frac{r^3}{24\pi^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}}\cdot\left(16\pi^2x^3 - 6x^5\right).$$

Il fattore $16\pi^2x^3 - 6x^5 = 2x^3\left(8\pi^2 - 3x^2\right)$ si annulla per $x = 0$ oppure per $x = -\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}$, oppure per $x = \sqrt{\frac{8\pi^2}{3}}$.

La prima soluzione corrisponde ovviamente al volume minimo, la seconda non appartiene all'intervallo specificato.

Il valore di x che fornisce il volume massimo è dunque $\sqrt{\frac{8\pi^2}{3}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

ATTIVITA' N. 7:

E' data la parabola di equazione $y = 6 - x^2$; condurre una retta $y = k$, $k > 0$ in modo tale che il rettangolo avente un lato sull'asse delle ascisse e due vertici nei punti di intersezione della parabola con la retta data, abbia area massima. [11]

Può essere di aiuto tracciare il grafico della parabola (vedi *Fig.* 5): la parabola può essere pensata come ottenuta a partire dal grafico $y = x^2$ a cui siano state applicate, nell'ordine, le seguente trasformazioni: una simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse ($y = -x^2$) ed una traslazione di 6 unità nella direzione delle ordinate positive ($y = -x^2 + 6$). [12]

$y = k$ ha come grafico una retta parallela all'asse delle ascisse.

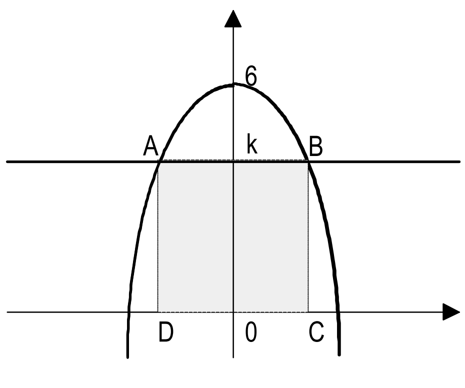

Fig. 5

Le coordinate dei punti A e B saranno date dalle soluzioni del sistema tra l'equazione della parabola e quella della retta:

[11] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, es. n. 231, pag. 488.

[12] V. Scheda n. 6, Attività n. 1 e n. 6.

$$\begin{cases} y = k \\ y = 6 - x^2 \end{cases}, \; 0 < k < 6.$$

Quindi i vertici del rettangolo saranno

$$A\left(-\sqrt{6-k}\,,k\right),\; B\left(\sqrt{6-k}\,,k\right),\; C\left(\sqrt{6-k)}\,,0\right),\; D\left(-\sqrt{6-k}\,,0\right).$$

Possiamo così esprimere l'area del rettangolo in funzione della variabile k:

$$S(k) = 2k\sqrt{6-k}\,,\; 0 < k < 6.$$

Da questa si ricava, applicando le note regole di derivazione:

$$S'(k) = 2\sqrt{6-k} + 2k\frac{-1}{2\sqrt{6-k}} = 2\sqrt{6-k} - \frac{k}{\sqrt{6-k}} = \frac{2|6-k|-k}{\sqrt{6-k}}.$$

Dato che $0 < k < 6$, $S'(k)$ si annulla per $k = 4$; il corrispondente valore di $S(k)$, $8\sqrt{2}$, è la massima area della superficie dei rettangoli ABCD al variare di k da 0 a 6.

SINTESI
MENU Per registrare su disco un "foglio di lavoro" come file di Utility, selezionare **Transfer Save *DERIVE*** e specificare il nome del file. La procedura è quindi la stessa che si usa per registrare una normale sessione di lavoro: la differenza tra questa e un file di Utility è solo nel modo in cui si "carica" il file: **Transfer Load *DERIVE*** legge il file che viene anche mostrato nell'ambiente di Algebra e può quindi essere all'occorrenza esaminato e modificato; **Transfer Load Utility** legge il file ma non lo mostra nell'ambiente di Algebra pur essendo pienamente disponibili le funzioni in esso definite.
FUNZIONI **lim(f(x),x,a,-1)** fornisce il limite della funzione **f(x)** per **x** che tende ad **a** da sinistra. Equivale alla scelta di menu **Calculus Limit**, digitando **a** nel campo **Point** e selezionando **Left** nel campo **From**. **lim(f(x),x,a,1)** fornisce il limite della funzione **f(x)** per **x** che tende ad **a** da destra. Equivale alla scelta di menu **Calculus Limit**, digitando **a** nel campo **Point** e selezionando **Right** nel campo **From**.
EDITING Selezionando **Author** e digitando, ad esempio, **f(x):=** è possibile "dichiarare" l'identificatore di funzione **f** anche se la funzione non viene esplicitamente definita. Senza questa "dichiarazione", *DERIVE* potrebbe interpretare **f(x)** come il prodotto tra una variabile di nome **f** ed una espressione chiusa tra parentesi costituita dalla sola variabile **x**.