Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio

SCHEDA N. 15

ARGOMENTO: Retta dei minimi quadrati. [1]

(LEZIONE n. 18)

ATTIVITA' N. 1:

In questa Attività si vuole costruire la matrice 3×2 formata dalle coordinate dei seguenti punti: (0; 1), (1; 3), (2; 2).

Una matrice, per farla breve, è un "riquadro" formato da numeri organizzati in righe ed in colonne. La posizione di ogni elemento della matrice è individuata da due indici che rappresentano, rispettivamente, la riga e la colonna in cui l'elemento si trova.

Quella che segue è una matrice formata da tre righe e due colonne.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

DERIVE considera una matrice come costituita da un "vettore di vettori", cioè da un insieme ordinato di vettori, ciascuno dei quali costituisce una riga della matrice.

Selezionare **Declare Matrix**, nel campo **Rows** digitare 3, nel campo **Columns** digitare 2.

Quando vengono richieste, inserire nella matrice i valori indicati, cioè, nell'ordine, **0**, **1**, **1**, **3**, **2**, **2** premendo <↵> dopo ogni valore.

Selezionare **Author** e digitare **a:=** , poi premere **<F3>** per richiamare nella linea di editing la matrice già digitata e confermare con <↵>.

Da questo istante la matrice data sarà individuata dall'identificatore **a**.

Si noti che, come si è detto, la matrice, anche se presentata come riquadro nello schermo di Algebra, nella linea di editing risulta rappresentata come un vettore (i cui elementi sono chiusi entro una parentesi quadra, separati dalla virgola) i cui 3 elementi sono a loro volta dei vettori.

Selezionare **Plot** per accedere allo schermo di grafica; selezionare **Plot** per disegnare i punti le cui coordinate sono riportate nella matrice **a**.

I punti indicati appaiono sullo schermo; se necessario premere **<F10>** per modificare opportunamente la scala.

ATTIVITA' N. 2:

Vogliamo determinare con *DERIVE* le coordinate del baricentro dei punti dati nella precedente Attività.

Premesso che è facilissimo calcolarle direttamente, vediamo un metodo più generale che possa funzionare qualunque sia la matrice dei punti e soprattutto qualunque sia il loro numero.

---

[1] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, Esempio 4.4-8 a pag. 256 e 4.4-1 a pag. 532.

xybar

Tornare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare la seguente formula:
x_bar(m) := sum(element(m,k,1),k,1,dimension(m))/dimension(m) <↵>.

La funzione **element(m,k,1)** fornisce il *k*-esimo elemento della prima colonna della matrice **m**; la funzione **dimension(m)** fornisce il numero delle righe della matrice (o del vettore) **m**.
Nella Scheda n. 7 si è incontrata la funzione **sum(espressione,k,vi,vf)** che esegue la somma dei termini indicati in **espressione**, con la variabile **k** che parte dal valore iniziale **vi** e raggiunge (a passi di 1) il valore finale **vf**.
Il numeratore della formula rappresenta quindi la somma di tutti gli elementi della prima colonna della matrice **m**; il denominatore rappresenta il numero dei punti.
Si faccia attenzione a digitare correttamente il simbolo di sottolineatura **_** nel primo membro della formula e non il carattere **-** ("meno") che sarebbe interpretato come una differenza. D'altra parte questo carattere è usato solo per motivi "estetici": essendo questa una funzione definita dall'utente, questi può darle il nome che preferisce.

Selezionare **Author** e digitare
y_bar (m):= sum(element(m,k,2),k,1,dimension(m))/dimension(m) <↵>.

Si consiglia di non digitare *ex novo* l'intera formula, ma di modificare la precedente formula richiamandola nella linea di editing con **Author <F3>**.
Questa formula calcola la media aritmetica delle ordinate dei punti.

Selezionare **Author**, digitare **[x_bar(a), y_bar(a)] <↵>**, selezionare **Simplify**.

Si ottengono le coordinate del baricentro. Si noti che, per come sono state costruite le formule, si ottengono le coordinate del baricentro indipendentemente dal numero dei punti considerati ovvero delle righe della matrice considerata: l'unico requisito è che queste coordinate siano inserite in una matrice il cui nome, in questo caso **a**, viene passato come argomento alle funzioni **x_bar** e **y_bar** prima definite.

Visualizzare il baricentro sullo schermo di grafica con il comando **Plot**, poi selezionare **Algebra** per tornare all'ambiente di calcolo.

<u>ATTIVITA' N. 3:</u>

Costruire una nuova matrice, 4×2 di nome **b**, ottenuta inserendo al primo posto la nuova riga **[x,mx+q]** nella precedente matrice **a**:

$$b := \begin{bmatrix} x & mx+q \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esistono vari modi per costruire la matrice **b**.
Il più semplice è quello manuale: selezionare **Author,** digitare **b:=**, poi evidenziare la matrice **a** e richiamarla nella linea di editing con <**F3**>. Sarà poi facile spostare il cursore all'inizio della matrice premendo ripetutamente <**ctrl**> + <**s**> (o anche il tasto di movimento cursore, se si è già attivata la linea di editing) e digitare la nuova riga; Accertarsi prima di essere in modalità **insert** premendo il tasto <**ins**>.

Un altro modo, descritto qui di seguito, è quello di utilizzare la funzione **append(u,v)** che crea un unico vettore (o matrice) le cui componenti sono, nell'ordine, quelle di **u** e quelle di **v**. [2]

Selezionare **Author** e digitare **b := append([[x, mx+q]], a) <↵>**, poi selezionare **Simplify**. [3]

Come è noto, in *DERIVE* una matrice è vista come un vettore (colonna) di vettori (riga): così nella linea di editing la matrice **a** viene presentata nella forma **[[0,1], [1,3], [2,2]]**. Anche la nuova riga dovrà così essere presentata come un vettore che sarà costituito da un solo elemento: il vettore **[x,mx+q]**. Ciò spiega la necessità della doppia coppia di parentesi quadre.

ATTIVITA' N. 4:

Selezionare **Author**, digitare **fit(b) <↵>**, poi selezionare **Simplify** [4].

La funzione **fit**, predefinita in *DERIVE*, fornisce la "curva" dei minimi quadrati, cioè la funzione $f(x)$, nella forma indicata nella prima riga della matrice **b**, tale che sia minima la somma dei quadrati degli scarti tra le ordinate dei punti specificati nella matrice e le ordinate dei punti del grafico di $y = f(x)$ di uguale ascissa.

Come si è detto, la prima riga della matrice argomento di **fit** deve contenere le indicazioni sul tipo di funzione desiderata: il primo elemento indica l'identificatore scelto per la variabile indipendente (di norma x); il secondo elemento indica il tipo di funzione desiderato. Nel nostro caso abbiamo digitato **mx+q**: ciò significa che desideriamo ottenere la *retta* dei minimi quadrati, dato che la funzione $y = mx + q$ ha come grafico una retta. *DERIVE* determinerà i valori da assegnare ai parametri m e q in modo che sia minima la somma dei quadrati degli scarti.

ATTIVITA' N. 5:

Dopo essersi accertati che sia evidenziata la retta ora trovata, passare all'ambiente di grafica; poiché non è stato cancellato nulla da questo ambiente, appaiono i punti dati, visualizzati nell'Attività n. 1 e il baricentro, visualizzato nell'Attività n. 2. Selezionare **Plot**.

Oltre ai punti già presenti nello schermo di grafica, appare la retta ora trovata.

Si noti che, come era prevedibile, la retta dei minimi quadrati passa proprio per il punto di coordinate (1; 2), baricentro dei punti dati.

Selezionare **Delete All** per cancellare l'ambiente di grafica, poi selezionare **Algebra** per tornare all'ambiente di Algebra.

ATTIVITA' N. 6:

Questa attività prevede l'uso della funzione **random** che è disponibile solo per la versione 2.5 di *DERIVE* e successive. I lettori che non dispongono di questa versione possono passare direttamente all'Attività n. 9.

---

[2] Questa funzione è predefinita in *DERIVE* a partire dalla versione 2.5.

[3] Gli utenti di versioni precedenti alla 2.5 possono disporre dell'analoga funzione **append_vectors** caricando come file di Utility la libreria **vector.mth**. Per l'uso dei file di Utility, v. Scheda n. 3, Attività n. 9.

[4] Nota per gli Utenti di *DERIVE* 2.5: a partire da questa versione è possibile digitare direttamente **fit([x,mx+q],a)**: l'**Append** sopra descritto viene così realizzato automaticamente. Tuttavia la procedura suggerita in queste pagine continua a funzionare anche con questa versione.

Selezionare **Author**, digitare **vector([k, random(10)], k, 1, 20)** <↵>, poi selezionare **Simplify**.

> Come noto (v. Scheda n. 1) la funzione **vector** genera un vettore attraverso una iterazione; la funzione ora digitata genera quindi una matrice 20×2 che contiene le coordinate di 20 punti le cui ascisse **k** variano da 1 a 20 a passo di una unità; l'ordinata di ciascun punto è un numero intero casuale scelto tra 0 e 9 attraverso la funzione **random(10)**.
> Si generano così le coordinate di una "nube" di punti, cioè di un insieme di 20 punti situati nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni $y = 0$, $y = 9$, $x = 1$, $x = 20$.

Selezionare ancora **Author**, digitare **a:=** e premere <**F3**> per richiamare nella linea di editing la matrice appena costruita; premere <↵> per confermare.

> La matrice prima costruita verrà d'ora in poi individuata dall'identificatore **a**. [5]

Selezionare **Author** e digitare **fit(b)** <↵>; selezionare **Simplify**.

> Si ottiene le retta dei minimi quadrati relativa alla nube di punti prima costruita.
> Si noti che non è necessario ripetere la definizione della matrice **b** se questa è stata costruita nell'Attività n. 3 con la funzione **append**: questa definizione rimane tuttora valida, indipendentemente dal contenuto e dalle dimensioni della matrice **a**.

Determinare le coordinate del baricentro dei punti della matrice **a** e tracciare il grafico della retta trovata visualizzando anche la "nube" ed il suo baricentro.

> Per visualizzare tutti i punti sullo schermo potrà essere utile modificare la scala con il tasto funzione <**F10**> e traslare gli assi in modo da posizionare l'origine nell'angolo inferiore sinistro dello schermo (v. Scheda n. 5, Attività n. 7).
>
> Per modificare la scala gli utenti di *DERIVE* 3 potranno usare in questo caso il comando **Range** del menu di grafica: selezionare **Range**; nel campo **Left**: scrivere, ad esempio, **-1**; nel campo **Right:** scrivere **20**, nel campo **Bottom: -1** e nel campo **Top: 10**.
> Viene così individuato il rettangolo formato dai punti del piano aventi l'ascissa compresa tra i valori indicati in **Left** e in **Right** e l'ordinata compresa tra i valori di **Bottom** e di **Top**. Premendo <↵> la scala viene automaticamente modificata in modo che questo rettangolo occupi l'intero schermo.

<u>ATTIVITA' N. 7:</u>

Riportare la scala ai valori standard.

> Purtroppo manca in *DERIVE* un comando che riporta automaticamente le impostazioni di scala e di visualizzazione ai valori di default. Sarà quindi necessario procedere manualmente usando alcuni comandi già descritti nella Scheda n. 5.

Selezionare **Move** e digitare **0** sia nel campo **x:** che nel campo **y:**, poi premere <↵>.

> Il cursore grafico viene posizionato nell'origine del sistema di riferimento, anche se questo si trova fuori dalla regione di piano visualizzata sullo schermo.

Selezionare **Center**.

> L'attuale posizione del cursore grafico (in questo caso l'origine) diventa il centro dello schermo.

---

[5] Non è opportuno digitare direttamente l'assegnazione ad **a** della funzione **vector**, perché, così facendo, ogni volta che viene invocata la variabile **a**, viene generata una *nuova* successione di punti casuali, diversa dalle precedenti.

Selezionare **Scale** e digitare **1** sia nel campo **x:** che nel campo **y:**, premere <↵>.

La scala viene riportata ai valori standard e tutto appare come quando si entra per la prima volta nell'ambiente di grafica.

ATTIVITA' N. 8:

Ripetere le azioni dell'Attività n. 6 generando una nube di 20 punti scelti a caso compresi nel rettangolo delimitato dalle rette $x = 1$, $x = 4$, $y = 2$, $y = 6$. [6]

Si suggerisce di costruire la matrice con la seguente funzione:

vector([1+3 random(1), 2+4 random(1)], k, 1, 20).

Se la funzione **random** ha argomento 1, viene generato un numero casuale *n* appartenente all'intervallo $[0, 1[$; **3 random(1)** genera quindi un numero razionale casuale non minore di 0 e minore di 3; aggiungendo 1 si ottiene un numero casuale tra 1 e 4.

Analogamente **2 + 4random(1)** genera un numero casuale compreso tra 2 e 6.

Calcolando con la funzione **fit** la retta dei minimi quadrati relativa a tali punti, si ottiene un grafico simile a quello riportato in Fig. 1: ovviamente, dato che i punti sono scelti ogni volta in modo casuale, non è detto che il grafico coincida con quello qui riportato. In tale figura i parametri usati sono: −1, 5, −1, 7 rispettivamente per **Left**, **Right**, **Bottom**, **Top**.

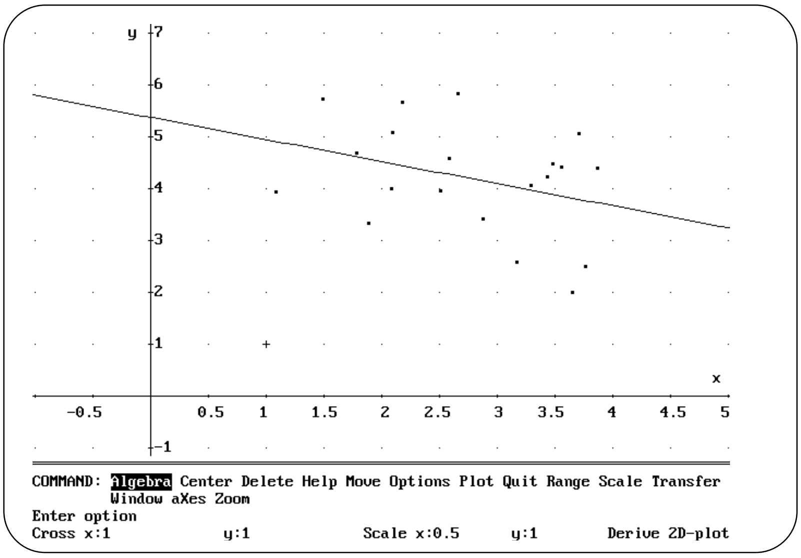

Fig. 1

Cancellare lo schermo di grafica con il comando **Delete All**, riportare le impostazioni di grafica ai valori standard come indicato nell'Attività 7, poi tornare all'ambiente di Algebra.

ATTIVITA' N. 9:

Selezionare **Author** e, seguendo le indicazioni dell'Attività n. 1, definire una nuova matrice **a** che contenga le coordinate dei due punti (0; 1), (1; 2).

Verificare, sia graficamente che con il calcolo, che considerando due soli punti, la retta dei minimi quadrati coincide con la retta individuata dai due punti stessi.

---

[6] E' molto improbabile che *tutti* i punti ottenuti abbiano la stessa ascissa. Vedi l'Attività n. 9.

La funzione **fit** può quindi essere utilizzata per trovare l'equazione della retta individuata da due punti.

I valori delle coordinate dei due punti possono essere presi a caso, purché, ovviamente, non abbiano la stessa ascissa. Vedremo ora che se avessero la stessa ascissa, la retta dei minimi quadrati non sarebbe determinata.

Definire la matrice **a** che contenga le coordinate dei seguenti punti (1; 2), (1; 4).
Trovare con le procedure sopraindicate la retta dei minimi quadrati.

La funzione **fit** in questo caso restituisce la seguente espressione: **@1 x - @1 + 3**.
Il simbolo **@n**, ove **n** è un numero intero positivo, viene usato da *DERIVE* per rappresentare una variabile arbitraria. Ciò significa, per l'appunto, che il problema proposto è indeterminato cioè ammette infinite soluzioni.
Ad esempio selezionando **soLve** per risolvere l'equazione **2x+1=x+1+x**, equazione ovviamente verificata per ogni **x**, si ottiene il risultato **x = @n**.
Ogni nuova variabile arbitraria sarà rappresentata da *DERIVE* con il simbolo **@n**, con **n** crescente ogni volta di una unità.
Nel nostro caso le infinite soluzioni costituiscono il fascio di rette che ha per equazione il risultato fornito.

Selezionare **Author**, digitare **vector(@1x-@1+3, @1, -5, 5)** <↵>, selezionare **Simplify** e tracciare il grafico del risultato ottenuto.

Si ottiene il grafico delle rette del fascio corrispondenti ai seguenti valori del parametro **@1**: – 5, – 4, – 3 e così via fino a 5.
Si noti che, come previsto, tutte le rette passano per lo stesso punto, centro del fascio: chi è questo punto?

<u>ATTIVITA' N. 10:</u>

Come si è già accennato nell'Attività n. 4, la funzione **fit** non fornisce solo la retta dei minimi quadrati, ma anche ogni altra di curva del tipo indicato nella prima riga della matrice argomento di **fit**.

Trovare la "parabola dei minimi quadrati" relativa alla seguente *n*-pla di punti e tracciarne il grafico: (0; 2), (1; –3), (2; 1), (3; 4).

In questo caso, poiché si desidera l'equazione di una parabola, nella prima riga della matrice **b** dovrà essere digitato il seguente vettore: **[x, ex^2+fx+g]**.
Si noti che per indicare i coefficienti nell'equazione della parabola non sono stati usati gli usuali identificatori **a**, **b**, **c**, per evitare conflitti con le variabili **a** e **b** che rappresentano le matrici da noi utilizzate per il calcolo di **fit**.

Anche in questo caso la funzione **fit** può essere utilizzata per risolvere un classico problema di geometria analitica: se i punti dati sono 3 (non allineati), cioè tanti quanti i parametri dell'equazione, la "parabola dei minimi quadrati" sarà..... la parabola che passa per quei punti.
Determinare l'equazione della parabola individuata dai punti di coordinate

(0; 2), (1; –3), (2; 1).

Cosa succede se il numero dei punti dati è inferiore al numero dei parametri della funzione specificata nella prima riga della matrice argomento di **fit**?

SINTESI

MENU

Per dichiarare una matrice, selezionare **Declare Matrix**, indicare il numero della righe nel campo **Rows** ed il numero delle colonne nel campo **Columns**; poi digitare ad uno ad uno i valori degli elementi della matrice separati da <↵>.

FUNZIONI

Element(v,n) fornisce l'n-esimo elemento del vettore **v**.
Element(v,n,m) fornisce l'elemento della matrice **v** posto nella n-esima riga e nella m-esima colonna.
append(u,v) crea un unico vettore le cui componenti sono, nell'ordine, quelle di **u** e quelle di **v**. Se **u** è una matrice con m righe ed n colonne e **v** un'altra con p righe e n colonne, la funzione **append** genera una matrice con $m + p$ righe ed n colonne. Poiché *DERIVE* non fa un controllo delle dimensioni (si limita in pratica a generare una lista di vettori), sarà cura dell'utente far sì che il numero delle colonne sia lo stesso per le due matrici.
Questa funzione è predefinita in *DERIVE* a partire dalla versione 2.5.

random(n), ove n è un numero intero >1, fornisce un numero <u>intero</u> casuale x, con $0 \le x < n$.
random(1) fornisce un numero razionale casuale x, con $0 \le x < 1$.
La funzione **random** è predefinita in *DERIVE* a partire dalla versione 2.1.

fit(a) fornisce l'equazione della "curva dei minimi quadrati" relativa ai punti indicati nella matrice **a**. La prima riga di **a** deve riportare come primo elemento la variabile indipendente (di norma **x**) e come secondo elemento l'equazione della curva desiderata espressa in funzione un certo numero k di parametri.
Se k è uguale al numero dei punti considerati, **fit** fornisce l'equazione della curva, del tipo indicato, che passa proprio per quei punti.
A partire dalla versione 2.5 di *DERIVE*, la funzione **fit** può anche essere usata con la seguente sintassi: **fit(v,a)**, ove **v** è un vettore bidimensionale del tipo **[x,f(x)]** e **a** è la matrice delle coordinate dei punti considerati: in pratica in questo caso l'**append** sopra descritto è automatico.

@n, ove n è un numero intero ≥ 1, rappresenta una variabile di valore arbitrario. Questo simbolo compare ogniqualvolta si incontra un risultato indeterminato. Diversi valori di n indicano distinte variabili arbitrarie.

MENU-GRAFICA

Il comando **Range** permette di definire un rettangolo delimitato dalle rette parallele agli assi coordinati di equazioni $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, essendo a, b, c, d i valori riportati nei campi, rispettivamente: **Left**, **Right**, **Bottom**, **Top**. Premendo <↵> la scala viene automaticamente modificata in modo che tale rettangolo occupi l'intero schermo.

Per riportare i parametri di visualizzazione ai valori standard posizionare il cursore grafico nell'origine selezionando **Move** e digitando **0** nel campi **x:** e **y:**; portare l'origine al centro dello schermo selezionando **Center**; impostare la scala selezionando **Scale** e digitando **1** nei campi **x:** e **y:**.