A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 16

ARGOMENTO: Il teorema del valor medio e i suoi corollari.

(LEZIONE n. 19)

ATTIVITA' N. 1:

Per ciascuna delle funzioni di seguito indicate controllare se sussistono le ipotesi di applicabilità del teorema del valor medio (o di Lagrange) nell'intervallo $[a, b]$ specificato. Se la risposta è affermativa, determinare esplicitamente i numeri reali ξ per i quali è

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Illustrare graficamente tutti i casi, prima manualmente, poi con *DERIVE* per controllare i propri risultati. [1]

a) $f(x) := x + |x|,\ x \in [-1, 1]$.
b) $f(x) := x + |x|,\ x \in [0, 2]$.
c) $f(x) := e^{|x|},\ x \in [-1, 1]$.
d) $f(x) := e^{|x|},\ x \in [0, 2]$.
e) $f(x) := \ln(1 + |x|),\ x \in [-1, 1]$.
f) $f(x) := \ln(1 + |x|),\ x \in [1, 3]$.
g) $f(x) := x^3 - x,\ x \in [-1, 2]$.
h) $f(x) := x^3 - 2x^2 + x + 2,\ x \in [-1, 2]$.

a) La funzione può anche essere espressa nella forma:

$$f(x) := \begin{cases} x + x = 2x, & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - x = 0, & \text{se } x \in [-1, 0[. \end{cases}$$

Pur essendo continua nell'intervallo specificato, la funzione non è derivabile in tutti i punti interni all'intervallo, dato che la derivata a sinistra della funzione e quella a destra nell'origine sono, rispettivamente, 0 e 2.
Quindi non sussistono le ipotesi di applicabilità del teorema del valor medio.

b) La funzione è continua nell'intervallo [0,2] ed è derivabile su]0,2[, quindi questa volta sono rispettate le ipotesi di applicabilità del teorema del valor medio.
E' $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, $f'(x) = 2$ nell'intervallo specificato. I numeri ξ cercati sono le soluzioni dell'equazione

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},\ x \in\ ]a, b[,$$

che nel nostro caso diviene

$$f'(x) = \frac{4 - 0}{2 - 0},\ x \in\ ]0, 2[,$$

vale a dire 2 = 2, che è ovviamente una identità, cioè è verificata per ogni x appartenente all'intervallo specificato.
La cosa appare evidente esaminando il grafico della funzione: il segmento di secante congiungente il punto del grafico di ascissa 0 con quello di ascissa 2 coincide con il grafico stesso.

[1] La maggior parte di questi esercizi sono tratti da *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, pag. 489.

c) La funzione data può essere espressa nella forma

$$f(x) := \begin{cases} e^x, & \text{se } x \in [0,1] \\ e^{-x}, & \text{se } x \in [-1,0[. \end{cases}$$

La funzione è continua nell'intervallo specificato, ma non è derivabile in tutti i punti interni all'intervallo. Infatti la derivata a sinistra e quella a destra della funzione nell'origine sono, rispettivamente, 1 e –1.
Quindi non sussistono le ipotesi di applicabilità del teorema del valor medio.

d) La funzione è continua nell'intervallo [0, 2] ed è derivabile su]0, 2[, quindi è possibile applicare il teorema del valor medio.
E' $f(0) = 1$, $f(2) = e^2$, $f'(x) = e^x$, nell'intervallo specificato.
L'equazione

$$e^x = \frac{e^2-1}{2},\ x \in]0, 2[,$$

ammette l'unica soluzione $x = \ln\frac{e^2-1}{2}$, che può essere approssimata con 1.16143.

e) Il grafico della funzione può essere facilmente tracciato a partire dal grafico della funzione $\ln x$ e sottoponendola, nell'ordine, alle seguenti trasformazioni [2]: traslazione orizzontale verso sinistra di una unità, unione con il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, dopo aver "cancellato" la parte di grafico giacente nel semipiano delle ascisse negative.
La funzione può essere espressa nella forma:

$$f(x) := \begin{cases} \ln(x+1), \text{ se } x \in [0,1] \\ \ln(1-x), \text{ se } x \in [-1,0[. \end{cases}$$

Nell'intervallo specificato la funzione è continua ma non derivabile in tutti i punti interni: infatti nell'origine la derivata a sinistra è –1, la derivata a destra è 1.
Quindi non può essere applicato il teorema del valor medio.

f) Nell'intervallo [1, 3] la funzione è continua ed è derivabile in tutti i punti interni ad esso.
$f(3) = \ln 4,\ f(1) = \ln 2,\ f'(x) = \frac{1}{x+1},$ per $x \in]1,3[$.
L'equazione

$$\frac{1}{x+1} = \frac{\ln 4 - \ln 2}{2}$$

ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{2}{\ln 2} - 1$$

che può essere approssimata con 1.88539.

g) La funzione è continua e derivabile per ogni x reale, quindi nell'intervallo indicato, come in qualunque altro intervallo, è applicabile il teorema del valor medio.
E' $f(-1) = 0$, $f(2) = 6$, quindi $f(b) - f(a) = 6$, $b - a = 3$; $f'(x) = 3x^2 - 1$.
L'equazione $3x^2 - 1 = 2$ ammette due soluzioni: $x = 1$ ed $x = -1$.
Solo la prima delle due appartiene all'intervallo]–1, 2[, quindi lo ξ, la cui esistenza è provata dal teorema di Lagrange, è unico ed è 1.

[2] V. Scheda n. 6, Attività n. 7 e n. 9.

h) Anche in questa funzione il teorema del valor medio è applicabile in qualunque intervallo $[a,b]$, quindi anche nell'intervallo specificato.
E' $f(-1) = -2$, $f(2) = 4$, $b - a = 3$, $f(b) - f(a) = 6$; $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
L'equazione $3x^2 - 4x + 1 = 2$ ammette le due soluzioni

$$x = \frac{2-\sqrt{7}}{3}, \quad x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$$

Entrambi i valori appartengono all'intervallo specificato, quindi in questo caso esistono due punti, ξ_1 e ξ_2 , che soddisfano la relazione del teorema di Lagrange.

ATTIVITA' N. 2:
a) Valutare l'errore che si commette [3] scegliendo 9 come stima (per difetto) di $(3.05)^2$.
b) Valutare l'errore che si commette scegliendo 4 come stima (per eccesso) di $(1.988)^2$.

Consideriamo la funzione $f(x) := x^2$. E' $f'(x) = 2x$. La funzione è continua e derivabile e la sua derivata è crescente su $[a,b]$, qualunque siano a e b reali ($a < b$).

a) Per il Corollario 3 a pag. 261 del Testo di riferimento, se $m_1 \le f'(x) \le m_2$, ($a < x < b$), allora $m_1(x - a) \le f(x) - f(a) \le m_2(x - a)$.
In questo caso prendiamo:

$$x = 3.05,\ a = 3,;m_1 = 0,\ \ m_2 = f'(3.05) = 2 \cdot 3.05 = \frac{610}{100}.$$

Avremo così

$$0 \le f(3.05) - f(3) \le 6 \cdot (3.05 - 3) = \frac{610}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{3050}{10000}.$$

Aggiungendo $f(3)$, cioè 9, membro a membro, si ha:

$$9 \le f(3.05) \le 9 + \frac{3050}{10000} = 9.305.$$

In effetti è $(3.05)^2 = 9.3025$.

b) In questo caso si tratta di una stima per eccesso. La tesi del Corollario 3 si può scrivere

$$m_1 \le \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \le m_2.$$

Poniamo così:

$$x = 1.988,\ b = 2,\ m_1 = 0,\ m_2 = f'(2) = 4.$$

Avremo quindi

$$0 \cdot (2 - 1.988) \le f(2) - f(1.988) \le 4 \cdot (2 - 1.988).$$

Togliendo $f(2)$, cioè 4, membro a membro, si ha:

$$-4 \le -f(1.988) \le 0.048 - 4,$$

vale a dire, cambiando il segno e quindi invertendo il senso delle disuguaglianze

$$3.952 \le f(1.988) \le 4.$$

In effetti è $(1.988)^2 = 3.95214$.

---

[3] V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, esempio 4.5-1 a pag. 261 ed esercizio 4.5-9 a pag. 264.

✍ ATTIVITA' N. 3:

Verificare che la funzione $f(x) := \sin^2 x + \cos^2 x$ ha derivata nulla.

Si ha, ricordando le regola di derivazione, in particolare quelle sulla derivazione delle funzioni composte (v. Paragrafo 4.3 del Testo di riferimento):

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x\,(-\sin x) = 0.$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che la funzione data è costante ed uguale ad 1, qualunque sia x.

✍ ATTIVITA' N. 4:

Trovare i valori di x per i quali le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

a) $f(x) := 3x^2 - 4x + 2$, b) $f(x) := x^3 - 12x + 5$,

c) $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$, d) $f(x) := \arcsin \dfrac{1}{x}$.

Per risolvere questi esercizi si userà il Corollario 2 a pag. 261 del Testo di riferimento; si tratta dunque di studiare il segno della derivata.

a) La funzione è derivabile per ogni x.
E' $f'(x) = 6x - 4$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x > 2/3$ e $f'(x) < 0$ per $x < 2/3$.
Dunque la funzione è (strettamente) crescente nell'intervallo $]2/3, +\infty[$ e (strettamente) decrescente nell'intervallo $]-\infty, 2/3[$.

b) La funzione è derivabile per ogni x.
E' $f'(x) = 3x^2 - 12$. Quindi [4] $f'(x) > 0$ per $x < -2$ o per $x > 2$, $f'(x) < 0$ per $-2 < x < 2$.
Dunque la funzione è crescente nell'intervallo $]-\infty, -2[$ oppure nell'intervallo $]2, +\infty[$ e decrescente nell'intervallo $]-2, 2[$.

c) La funzione è derivabile per ogni x.
Si ha

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Il numeratore di questa frazione è positivo per $-1 < x < 1$, negativo per $x < -1$ oppure per $x > 1$; il denominatore è positivo per qualunque valore di x.
Quindi la funzione è crescente nell'intervallo $]-1, 1[$; è invece decrescente nell'intervallo $]-\infty, -1[$ oppure nell'intervallo $]1, +\infty[$.

d) L'insieme naturale di definizione della funzione $\arcsin x$ è l'intervallo $[-1, 1]$.
Quindi deve essere $-1 \le 1/x \le 1$. Questa relazione equivale al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1/x \ge -1 \\ 1/x \le 1 \end{cases}$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{cases} x \le -1 \\ x \ge 1. \end{cases}$$

Utilizzando il teorema della derivazione delle funzioni composte, si ottiene

4 V. Scheda n. 7, Attività n. 1.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2\sqrt{(x^2-1)/x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}.$$

La derivata è negativa per $x \in]-\infty, -1[$ oppure per $x \in]1, +\infty[$ e in questi punti la funzione sarà decrescente.

<u>ATTIVITA' N. 5:</u>

Tracciare con *DERIVE* il grafico di ciascuna delle funzioni viste nella precedente Attività insieme al grafico della loro derivata.

Si consideri in particolare il segno della derivata in relazione all'andamento della corrispondente funzione.

<u>ATTIVITA' N. 6:</u>

Date le funzioni

a) $f(x) := -2x^2 + 4x - 1$, $g(x) := x^2 - 2x - 2$, $x \in [0, 3]$,

b) $f(x) := x^3 - 2x^2$, $g(x) := x^2 + 2x$, $x \in [-1, 0]$,

controllare se sussistono le ipotesi di applicabilità del teorema degli accrescimenti finiti (o di Cauchy [5]) e, in caso affermativo, trovare i punti ξ previsti dal teorema.

a) Le funzioni sono continue e derivabili nell'intervallo [0, 3].
Si ha $g(a) = g(0) = -2$; $g(b) = g(3) = 1$; $f(a) = f(0) = -1$; $f(b) = f(3) = -7$.
E' quindi possibile applicare il teorema degli accrescimenti finiti.
Si ha $f'(x) = -4x + 4$; $g'(x) = 2x - 2$. Quindi entrambi le derivate si annullano nel punto $\xi = 1$.

b) Le funzioni sono continue e derivabili nell'intervallo [–1, 0].
Si ha $g(a) = g(-1) = -1$; $g(b) = g(0) = 0$; $f(a) = f(-1) = -3$; $f(b) = f(0) = 0$.
E' possibile applicare il teorema degli accrescimenti finiti.
Si ha $f'(x) = 3x^2 - 4x$; $g'(x) = 2x + 2$.
Troviamo ξ.
L'uguaglianza

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad (1)$$

ci dà l'equazione

$$\frac{3x^2-4x}{2x+2} = 3$$

che ha le due soluzioni

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{43}}{3}, \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{43}}{3}$$

che si possono approssimare, rispettivamente, con –0.518145 e 3.85247.
Di queste, solo la prima appartiene all'intervallo specificato, quindi, come previsto dal teorema di Cauchy, esiste uno ξ che soddisfa la (1); in questo caso esso è unico ed è uguale ad x_1.

5 V. Proposizione 4.5-3 a pag. 262 del Testo di riferimento.