Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 17

ARGOMENTO: I teoremi di L'Hôpital. Forme indeterminate.

ATTIVITA' N. 1:

Calcolare i seguenti limiti: [1]

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2};\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}};$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}};\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3};$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x};\qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}.$$

a) Si tratta di un limite che abbiamo già calcolato senza l'uso dei teoremi di L'Hôpital.[2] Tuttavia ora lo calcoleremo applicando la Proposizione 4.6-1 a pag. 265 del Testo di riferimento.

Le funzioni rispettivamente al numeratore ed al denominatore sono continue e derivabili ed assumono entrambi il valore 0 nel punto $x = 2$. Si tratta dunque di una forma indeterminata del tipo 0/0.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-4x^2+5x-2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-12x+11}{3x^2-8x+5}=-1.$$ [3]

Abbiamo così ottenuto, con pochissimi calcoli, il medesimo risultato visto nella Scheda n. 10.

b) Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Le ipotesi del teorema di L'Hôpital sono soddisfatte; quindi

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}\cdot\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,.$$

---

[1] La maggior parte degli esercizi di questa e delle prossime Attività sono tratti da *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - Ed. Zanichelli, pagg. 268, 489, 490,

[2] V. Scheda n. 10, Attività n. 4.

[3] Come è noto, il simbolo di uguaglianza sormontato dalla lettera H rappresenta una "uguaglianza condizionata" ed esprime il fatto che il teorema di L'Hôpital dà una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza del limite dato (v. Osservazione 1 a pag, 266 del Testo di riferimento).

c) Anche in questo caso si tratta di un limite già incontrato in precedenza. [4]
Questa volta è una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Utilizzeremo così la Proposizione 4.6-2 a pag. 267 del Testo di riferimento.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+e^{2x}}{1+e^{2x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = 1.$$

d) Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0. Applichiamo il teorema di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} =$$

Otteniamo ancora una forma indeterminata del tipo 0/0, ma nulla ci impedisce di riapplicare il teorema di L'Hôpital per il calcolo del nuovo limite così ottenuto:

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

e) Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞.
Applicando il teorema di L'Hôpital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

f) Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0.
Ancora una volta l'applicazione del teorema di L'Hôpital ci fornisce immediatamente il risultato:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\cos x}{1/(x+1)} = \lim_{x\to0} (x+1)\cos x = 1.$$

<u>ATTIVITA' N. 2:</u>

Negli esercizi proposti nella precedente Attività si sono incontrati solo limiti che presentavano forme indeterminate del tipo 0/0 oppure ∞/∞. Ora saranno proposti alcuni limiti che presentano altri tipi di forme indeterminate. Per poter applicare i teoremi di L'Hôpital sarà necessario operare opportuni passaggi per ricondursi ad una delle forme indeterminate del tipo 0/0 oppure ∞/∞.

Per i casi di indeterminazione si rimanda alle tabelle 3.6-1, 3.6-2, 3.6-3 a pag. 214, 215 e 3.7-1 a pag. 220 del Testo di riferimento.

Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$; b) $\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$;

c) $\lim_{x\to0^+} x^x$; d) $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$;

e) $\lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$; f) $\lim_{x\to\pi/2} \left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

a) Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞ − ∞. Sarà sufficiente ridurre allo stesso denominatore:

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

[4] V. Scheda n. 10, Attività n. 2.

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

b) Si tratta ancora di una forma indeterminata del tipo ∞ – ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\cdot\left(1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\right).$$

Calcoliamo separatamente il secondo di questi limiti: poiché si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞ /∞, possiamo applicare il teorema di L'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Quindi il limite cercato è = +∞.

c) Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0^0 (v. Tabella 3.7-1 a pag. 220 del Testo di riferimento).
Poiché, per definizione della funzione logaritmo, è

$$a = b^{\log_b a},\ \forall a, b \in R, \text{con } a, b > 0,\ a \neq 1\ ,$$

possiamo scrivere

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}.$$

Si dovrà quindi valutare il comportamento della funzione $x \ln x$.
Poiché $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, [5] il risultato del limite proposto è 1.

d) Si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞ – ∞.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} =$$

trattandosi ora di una forma indeterminata del tipo 0/0, si ottiene

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (\cos x - x\sin x)}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}.$$

Poiché è ancora una forma indeterminata del tipo 0/0, possiamo applicare una seconda volta il teorema di L'Hôpital, ottenendo così

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

e) E' ancora una forma indeterminata del tipo 0^0; procediamo quindi come nel precedente esercizio c):

$$x^{\sin x} = e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\sin x \ln x}.$$

Dovremo quindi valutare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x.$$

Si tratta ancora di una forma indeterminata del tipo 0·∞.

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot(x\ln x)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} (x\ln x).$$

Si tratta del prodotto tra due "limiti notevoli": il primo è 1, il secondo, già incontrato nella precedente Attività, è 0.
Quindi il limite proposto è 1.

f) Si tratta di una forma indeterminata del tipo 1^∞.
Ricorriamo all'espediente già visto negli esempi precedenti:

[5] V. Esempio 4.6-5 a pag. 267 del Testo di riferimento.

$$\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x} = e^{\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{\tan x}} = e^{\tan x \ln\tan\frac{x}{2}}.$$

Dovremo quindi valutare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi/2} (\tan x \cdot \ln\tan\frac{x}{2}) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\ \tan(x/2)}{\frac{1}{\tan x}}.$$

Poiché tan(π/4) = 1 e ln1 = 0, si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞ ε possiamo applicare il teorema di L'Hôpital.

Avremo così:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\ \tan(x/2)}{\frac{1}{\tan x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{\tan(x/2)}\cdot\frac{1}{\cos^2(x/2)}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{-1/\cos^2 x}{\tan^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{1}{2\tan(x/2)\cos^2(x/2)} \cdot (-\tan^2 x\cos^2 x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{-1}{2\tan(x/2)\cos^2(x/2)} \cdot \sin^2 x\right).$$

Poiché

$$\lim_{x\to\pi/2} \tan\frac{x}{2} = 1; \quad \lim_{x\to\pi/2} \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to\pi/2} \sin^2 x = 1,$$

il limite ora attenuto è –1. quindi il limite cercato è e^{-1}.

ATTIVITA' N. 3:

Verificare che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$, dopo aver constatato l'inapplicabilità della regola di L'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Ma il limite della funzione a secondo membro non esiste: infatti si tratta di una funzione periodica con periodo 2π; inoltre la funzione è superiormente illimitata, cioè la sua immagine non ammette maggiorante: il limite della funzione per x che tende a π + 2kπ, ove k è un qualsiasi numero intero, è +∞.

Tuttavia il limite a primo membro può essere facilmente calcolato dividendo sia il numeratore che il denominatore per x:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-(\sin x)/x}{1+(\sin x)/x}.$$

Valutiamo ora il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$: è certo 0, dato che si tratta del rapporto tra una funzione limitata (sin$x$) ed una divergente (x).

Quindi il limite proposto è = 1.

ATTIVITA' N. 4:

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}.$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0.

Applichiamo quindi la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x} \cdot 1/x^2}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Si ottiene ancora una forma indeterminata del tipo 0/0.
Se applicassimo di nuovo la regola di L'Hôpital, otterremmo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3},$$

che è ancora una forma indeterminata.

Dunque la regola di L'Hôpital risulta in questo caso inefficace.
Se però la funzione considerata viene scritta nella forma $\frac{1/x}{e^{1/x}}$, si ottiene una forma indeterminata del tipo ∞/∞ e, applicando la regola di L'Hôpital, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2}{-1/x^2 e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty,$$

il limite cercato è = 0.
Qual'è il limite della funzione proposta per $x \to 0^-$?