Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 18

ARGOMENTO: Ricerca di massimi e minimi relativi.

(LEZIONE n. 17)

ATTIVITA' N. 1:

Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo proprio delle seguenti funzioni:

a) $f(x) := x^3 - 12x$; b) $f(x) := \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2$;

c) $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 2}$; d) $f(x) := \ln \dfrac{1}{x^2}$;

e) $f(x) := \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; f) $f(x) := e^x - e^{2x} + 1$;

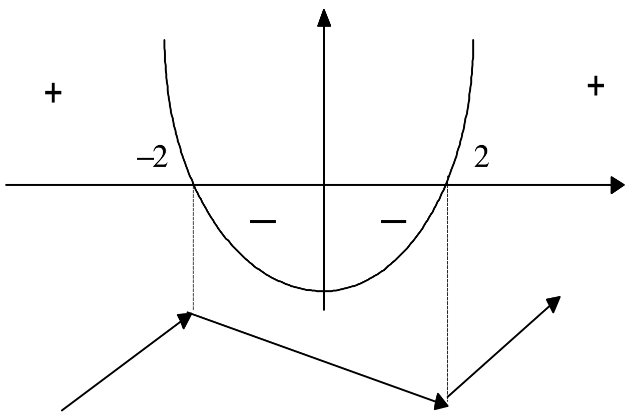
g) $f(x) := x \ln x + x$; h) $f(x) := \operatorname{atan}(2 + x) - \ln(x^2 + 4x + 5)$.

Possiamo pervenire ai risultati richiesti in due modi:

- utilizzando la Proposizione 4.6-3 a pag. 267 del Testo di riferimento, cioè esaminando il segno della derivata seconda nei punti critici, vale a dire nei punti in cui si annulla la derivata prima;
- utilizzando il Corollario 2 a pag. 261 del Testo di riferimento, cioè attraverso lo studio del segno della derivata prima: se ad esempio il punto x_0 è un punto interno al dominio della funzione e la funzione risulta continua in x_0, crescente per $x < x_0$, decrescente per $x > x_0$, nel punto x_0 la funzione avrà un massimo relativo.

a) Si ha: $f'(x) = 3x^2 - 12$, $f''(x) = 6x$.
Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -2$, $x = 2$.
Essendo $f''(-2) < 0$, $f''(2) > 0$, la funzione data per $x = -2$ ha un massimo relativo, per $x = 2$ un minimo relativo.

Ritroviamo lo stesso risultato con il secondo procedimento:
La disuguaglianza $f'(x) > 0$ può essere interpretata analiticamente attraverso il confronto tra il grafico della parabola $y = 6x^2 - 3$ e l'asse delle ascisse. [1]



[1] V. anche Scheda n. 7.

Le frecce sottostanti rappresentano in forma schematica l'andamento della funzione: crescente per $x < -2$ oppure per $x > 2$, decrescente per $-2 < x < 2$. Dunque la funzione presenta un massimo relativo per $x = -2$, un minimo relativo per $x = 2$.

b) Si ha: $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$, $f''(x) = 6x^2 - 6x + 1$.
I punti critici sono $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$.
Poiché $f''(0) = 1 > 0$, $f''(1/2) = -1/2 < 0$, $f''(1) = 1 > 0$, la funzione avrà un punto di massimo relativo per $x = 1/2$ e due punti di minimo relativo per $x = 0$ e per $x = 1$.

c) Si ha:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x+2)-(x^2-2x)(2x-1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{3x^2+4x-4}{(x^2+x+2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{(6x+4)(x^2+x+2)^2-(3x^2+4x-4)\cdot 2(x^2+x+2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x+2)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2+x+2)\left[(3x+2)(x^2+x+2)-(2x+1)(3x^2+4x+4)\right]}{(x^2+x+2)^4} =$$

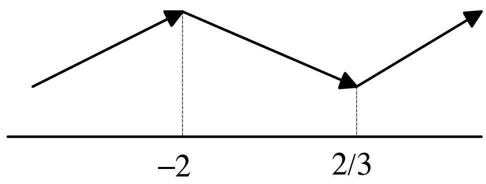
$$= \frac{-2(3x^3+6x^2-12x-8)}{(x^2+x+2)^3}.$$

I punti critici si trovano risolvendo l'equazione $3x^2 + 4x - 4 = 0$:

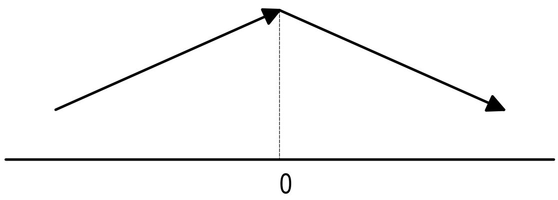
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3},$$

da cui si ottiene: $x = -2$, $x = 2/3$.
Poiché $f''(-2) = -1/2$ mentre $f''(2/3) = 81/98$, la funzione ha un massimo relativo per $x = -2$ ed un minimo relativo per $x = 2/3$.

Con il secondo procedimento è sufficiente studiare il segno della derivata prima.
Il denominatore è positivo per ogni valore di x, quindi sarà sufficiente esaminare il segno del numeratore che risulta positivo (e quindi la funzione è crescente) per $x < -2$ o per $x > 2/3$, negativo (e quindi la funzione è decrescente) per $-2 < x < 2/3$.
La situazione può essere così schematizzata:



d) Quando si usa il secondo procedimento è necessario fare attenzione; ad esempio con la funzione data si ha $f'(x) = -2/x$, quindi la funzione è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$. In questo caso lo schema appare come il seguente:



Si potrebbe allora ingenuamente pensare che la funzione in 0 abbia un massimo relativo, mentre invece per $x = 0$ non è derivabile (e neppure definita!).

e) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\ ,$$

che non si annulla per alcun x in cui la funzione è definita. In effetti si tratta di una funzione crescente.
E' opportuno notare che ci stiamo dedicando alla ricerca dei massimi e dei minimi relativi, di cui questa funzione è priva. Non è però priva di minimo assoluto: infatti la funzione data è ovviamente non negativa per tutti gli x appartenenti al suo insieme naturale di definizione e si annulla per $x = 0$ che è quindi punto di minimo assoluto.

f) Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = e^x - 2e^{2x}.$$

Raccogliendo a fattore comune e^x, ed osservando che questo fattore non si annulla per alcun valore di x, si ottiene che la derivata si annulla quando $e^x = 1/2$ e quindi l'unico punto critico è $x = \ln(1/2)$, che è come dire $x = -\ln 2$.

$$f''(x) = e^x - 4e^{2x}.$$

Avremo così

$$f''(-\ln 2) = 1/2 - 4\,(1/2)^2 = -1/2.$$

Quindi per $x = -\ln 2$ la funzione ha un massimo relativo.

g) La derivata della funzione è:

$$f'(x) = \ln x + 2,$$

che si annulla per $x = e^{-2}$.
Poiché la derivata seconda $f''(x) = 1/x$ è positiva nel punto critico, la funzione ha un minimo relativo per $x = e^{-2}$.

h) Calcoliamo la derivata della funzione data:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(2+x)^2} - \frac{2x+4}{x^2+4x+5} = \frac{-2x-3}{x^2+4x+5}.$$

Utilizziamo il secondo metodo descritto: la derivata è positiva per $x < -\frac{3}{2}$, negativa per $x > -\frac{3}{2}$, quindi la funzione data ha un massimo relativo per $x = -\frac{3}{2}$.

ATTIVITA' N. 2:
Selezionare **Author** e digitare la prima delle funzioni considerate nella precedente Attività: **x^3-12x** <↵>.
Selezionare **Calculus Differentiate** e premere tre volte <↵> per confermare le proposte nei campi **expression**, **variable** ed **order.** Selezionare **Simplify** per determinare la derivata della funzione.

Compare la derivata della funzione data.

Selezionare **soLve** per calcolare i punti critici.

Si ricordi che se nella espressione evidenziata non compare una uguaglianza, *DERIVE* sottintende che sia uguale a 0.

Evidenziare con i tasti cursore la funzione data e selezionare **Calculus Differentiate**, premere due volte <↵> per confermare le proposte nei campi **expression** e **variable**, digitare **2** invece di **1** nel campo **Order** e infine premere <↵> per confermare e selezionare **Simplify**.

Si ottiene la derivata seconda della funzione data.

Dopo essersi accertati che sia evidenziata la derivata seconda ora ottenuta, selezionare **Manage Substitute**, premere <↵> per confermare di voler operare sulla espressione evidenziata e, nel campo **value** digitare **-2**, cioè l'ascissa del primo dei punti critici prima ottenuti; selezionare **Simplify**.

Compare il valore della derivata seconda calcolata nel punto critico.

Ripetere le ultime operazioni per calcolare il valore della derivata seconda nel secondo punto critico.

E' evidente che in questo esempio i calcoli sono talmente facili che la loro effettuazione con *DERIVE* appare come un inutile spreco di risorse. La procedura qui attuata è però applicabile anche a funzioni ben più impegnative di questa.

Con la procedura ora vista si ottiene "manualmente" la ricerca dei punti di massimo o minimo relativo. Nella prossima Attività metteremo a punto una procedura che automatizzi questa ricerca.

ATTIVITA' N. 3:

Selezionare **Transfer Clear** e rispondere **Y** alla domanda **Abandon expression**?.

Il foglio di lavoro viene azzerato (v. Scheda n. 13).

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=** <↵>, poi **g(x):=** <↵>.

Come si è già visto in altre occasioni (v. Scheda n. 14), tali dichiarazioni "a vuoto" servono per informare *DERIVE* che **f(x)** e **g(x)** vanno interpretate come funzioni ancora da definire e non come il prodotto tra la variabile **f** (o **g**) e l'espressione **x** chiusa tra parentesi.

minmax

Selezionare **Author** e digitare **minmax(a):=if(g(a)>0,"MINIMO RELATIVO", if(g(a)<0, "MASSIMO RELATIVO", "INEFFICACE"))** <↵>.

Definiremo la funzione **g(x)** come derivata seconda della funzione **f(x)**.

La funzione **minmax(a)** con l'uso dell'istruzione **if**, equivale alla seguente istruzione alternativa multipla:

se $f''(a) > 0$
allora scrivi "MINIMO RELATIVO"
altrimenti se $f''(a) < 0$
allora scrivi "MASSIMO RELATIVO"
altrimenti scrivi "INEFFICACE"

Si noti che la funzione **if**, oltre che calcolare una espressione, può anche far comparire un messaggio, cioè una scritta chiusa tra virgolette.

Salvare la funzione selezionando **Transfer Save Derive**; nel campo **file** digitare il nome che si intende dare al file, ad esempio **minmax** <↵>.

Caricando questo file come file di Utility la funzione sarà disponibile anche nelle successive sessioni di lavoro.

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=1/2x^4-x^3+1/2x^2-2** <↵>.
Selezionare **Calculus Differentiate** per calcolare la derivata prima della funzione.
Selezionare **soLve** per ottenere le ascisse dei punti critici.
Evidenziare la linea in cui è stata definita la funzione **f(x)** e selezionare **Calculus Differentiate** digitando **2** nel campo **Order**. Selezionare **Simplify** per ottenere la derivata seconda della funzione.

Naturalmente la derivata seconda è anche ottenibile evidenziando la derivata prima, selezionando **Calculus Differentiate**, digitando **1** nel campo **Order** ed infine selezionando **Simplify** : la derivata seconda non è che la derivata della derivata prima.

Selezionare **Author** e digitare **g(x):=**, poi premere il tasto funzione **<F3>** e confermare con <↵>.

La derivata seconda calcolata in precedenza viene così richiamata nella linea di editing e d'ora in poi sarà individuata dall'identificatore **g(x)**.[2]

Usare la funzione **minmax** ponendo come argomento, l'uno dopo l'altro, i punti critici prima trovati con l'uso di **soLve**. Selezionando **Simplify** si ottiene la risposta desiderata.

Per ottenere i risultati relativi alle altre funzioni, ripetere la definizione delle funzioni **f(x)** e **g(x)** e, ovviamente, ricalcolare gli eventuali punti critici.

<u>ATTIVITA' N. 4:</u>

Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo proprio della seguente funzione:

$$f(x) := x^5 - 2x^4 + 1.$$

La derivata della funzione è $f'(x) = 5x^4 - 8x^3$, che si annulla per $x = 0$ o per $x = 8/5$.
La derivata seconda è $f''(x) = 20x^3 - 24x^2$.
E' $f''(8/5) = 512/25 > 0$, quindi $x = 8/5$ è un minimo relativo.
E' $f''(0) = 0$, quindi il criterio già usato risulta inefficace. E' però possibile applicare la seguente generalizzazione (indicata nell'esercizio 4.6-4 a pag. 268 del Testo di riferimento):

Sia $f : I \to R$, $x_0 \in I$ e $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo (di massimo relativo se $f^{(n)}(x_0) < 0$).
Se n è dispari, x_0 non è punto di massimo né di minimo.

Utilizziamo dunque questo criterio per esaminare il comportamento della funzione nel punto $x = 0$.
$f'''(x) = 60x^2 - 48x$ e ancora $f'''(0) = 0$.
$f^{(iv)}(x) = 120x - 48$ e $f^{(iv)}(0) = -48$. Essendo n pari e la derivata n-esima negativa, la funzione ha un massimo relativo per $x = 0$.

Allo stesso risultato si poteva pervenire studiando gli intervalli in cui la funzione data risulta essere crescente o decrescente:

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 = x^3(5x - 8).$$

Il primo fattore ha lo stesso segno di x, cioè è positivo quando x è positivo, negativo quando x è negativo, si annulla quando x si annulla.

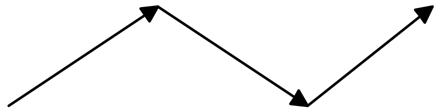
Il secondo fattore è positivo per $x > 8/5$.

La situazione potrebbe essere riassunta in una tabella come la seguente:

---

2 Purtroppo *DERIVE* non consente una definizione diretta della funzione **g**: ad esempio semplificando l'espressione **g(x):=dif(f(x),x,2)** si ottiene sì la derivata seconda di **f(x)**, ma si "perde" la definizione della funzione **g(x)**.

		0		8/5	
I fattore	−		+		+
II fattore	−		−		+
prodotto	+		−		+



La derivata risulta positiva, quindi la funzione è crescente, per $x < 0$ o per $x > 8/5$, negativa, quindi la funzione è decrescente, per $0 < x < 8/5$. Poiché nei punti critici la funzione è continua, la funzione ha un massimo relativo per $x = 0$ ed un minimo relativo per $x = 8/5$.

Concludiamo questa Attività dimostrando il criterio prima enunciato:
Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}.$$

Poiché si tratta di una forma indeterminata del tipo 0/0, applichiamo ripetutamente la regola di L'Hôpital.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} \overset{\text{H}}{=}$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} =$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x)}{n(n-1)(n-2)(x - x_0)^{n-3}} = \ldots\ldots =$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-k)}(x)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}} = \ldots\ldots =$$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2(x - x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x - x_0)}.$$

Si ricordi infatti che, per ipotesi, $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.
Ma la funzione di cui ora si deve calcolare il limite non è che il rapporto incrementale della funzione $f^{(n-1)}(x)$, quindi il limite è

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Quindi, in un opportuno intorno di x_0, $f^{(n)}(x_0)$ e l'espressione $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n}$ hanno lo stesso segno.
Dato che per ipotesi n è pari, il denominatore è positivo (per ogni $x \neq x_0$).
Quindi se $f^{(n)}(x_0) < 0$ in un intorno di x_0, in tale intorno sarà anche $f(x) - (x_0) < 0$, quindi $f(x) < f(x_0)$ e quindi la funzione in $x = x_0$ avrà un punto di massimo.
Un ragionamento analogo sarà fatto nel caso di $f^{(n)}(x_0) > 0$.

ATTIVITA' N. 5:
Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo proprio delle seguenti funzioni:

a) $f(x) := |x-1|\, x^2 + 1$;   b) $f(x) := \begin{cases} x^3, \text{ se } x \in [-1, 1], \\ \frac{1}{x}, \text{ altrimenti.} \end{cases}$

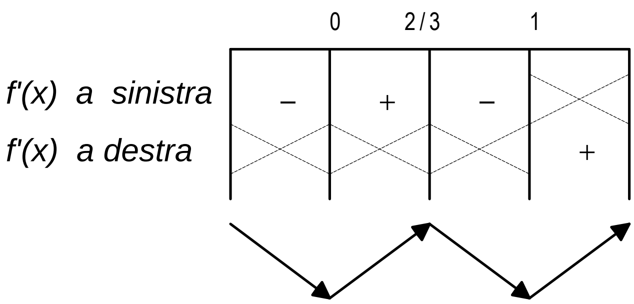
a) La funzione può anche essere presentata nella forma:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 - x^2 + 1, & \text{se } x \geq 1, \\ -x^3 + x^2 + 1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

La funzione nel punto di ascissa $x = 1$ è continua ma non derivabile.
Infatti

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1), \quad f_-'(1) = 1, \quad f_+'(1) = -1.$$

Nell'intervallo $]-\infty, 1[$ la derivata della funzione, $f'(x) = -3x^2 + 2x$, si annulla per $x = 0$ e per $x = 2/3$.
E' $f''(0) = 2$, quindi la funzione ha un minimo relativo nel punto $x = 0$; $f''(2/3) = -2$, quindi la funzione ha per $x = 2/3$ un massimo relativo.
Nell'intervallo $[1, +\infty[$ la derivata della funzione, $f'(x) = 3x^2 - 2x$, non si annulla per alcun valore di x (beninteso, nessun x appartenente all'intervallo).
La funzione, oltre a quelli già indicati, ha un minimo relativo per $x = 1$, individuabile attraverso lo studio del segno della derivata.
Il polinomio $-3x^2 + 2x$ è positivo per $0 < x < 2/3$, il polinomio $3x^2 - 2$ risulta positivo per $x < 0$ o per $x > 2/3$. La situazione potrebbe essere rappresentata con il seguente schema, in cui le linee tratteggiate indicano gli intervalli nei quali la derivata corrispondente non ha validità.



Da qui si vede che la funzione, essendo continua per ogni x, ha anche un minimo relativo per $x = 1$.
Si noti che l'esame dei punti in cui si annulla la derivata prima fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per l'esistenza del massimo o minimo relativo.

b) La funzione è continua per ogni x. Osserviamo anche che la funzione, per $x = -1$ e per $x = 1$, è continua ma non derivabile.
Infatti

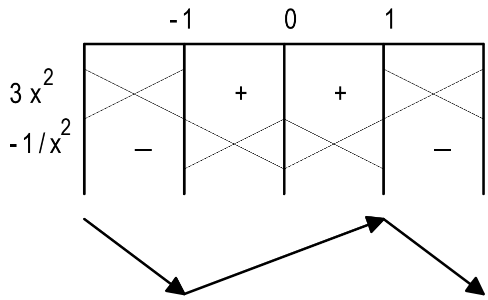
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -1 = f(-1);$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = f(1);$$

$$f_-'(-1) = -1, \quad f_+'(-1) = 3, \quad f_-'(1) = 3, \quad f_+'(1) = -1.$$

Nell'intervallo $[-1, 1]$ la derivata della funzione è $3x^2$, positiva per ogni x ad eccezione di $x = 0$. E' $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$. Poiché la derivata non nulla è di ordine 3 (dispari), per $x = 0$ la funzione non ha né un massimo né un minimo.
Per ogni x esterno all'intervallo $[-1, 1]$ la derivata è negativa.

Anche in questo caso riassumiamo la situazione del segno della derivata prima con uno schema:



La funzione ha dunque un minimo relativo per $x = -1$ e un massimo relativo per $x = 1$.
Tracciare manualmente il grafico della funzione e verificare il risultato ottenuto con *DERIVE* seguendo le indicazioni per tracciare il grafico di una funzione che sono state date nella Scheda n. 5.
La funzione ora esaminata dovrà essere così digitata: **if(x<-1 or x >1,1/x,x^3)**.