Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. 20

ARGOMENTO: Grafici di funzioni numeriche reali. Asintoti orizzontali, verticali, obliqui.
(LEZIONI n. 22 e 23)

PREMESSA
In questa Scheda si vedranno esempi di studi realizzati "manualmente"; nella Scheda successiva le funzioni saranno esaminate con l'aiuto di *DERIVE*.

Per studiare una funzione, cioè tracciarne il grafico evidenziando la presenza di eventuali asintoti, estremanti e punti di flesso, si seguirà la traccia indicata a pag. 279 del Testo di riferimento. Potranno anche essere utili gli esempi visti nelle Schede n. 5 e 6.

ATTIVITA' N. 1:
Studiare la seguente funzione: [1]

$$f(x) := \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

Si tratta di una funzione razionale fratta dispari: infatti

$$f(-x) = \frac{-2x}{x^2 - 4} = -f(x).$$

Il dominio naturale di definizione è ogni x reale ad eccezione di $x = 2$ e $x = -2$, valori che annullano il denominatore della frazione.
La funzione si annulla per $x = 0$, quindi il grafico passa per l'origine.

Studiamo il segno della funzione: il numeratore ha lo stesso segno di x, il denominatore è positivo per $x < -2$ oppure per $x > 2$. La situazione potrebbe essere riassunta con il seguente schema:

		-2	0	2	
num.	–	–	+	+	
den.	+	–	–	+	
funz.	–	+	–	+	

In corrispondenza di ciascuno degli zeri del denominatore, $x = -2$ ed $x = 2$, il grafico della funzione ha un asintoto verticale; infatti, tenendo anche presente lo studio del segno della funzione, si ha:

$$\lim_{x \uparrow -2} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \downarrow -2} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \uparrow 2} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \downarrow 2} f(x) = +\infty.$$

Si ricordi che i simboli $x \uparrow x_0$ e $x \downarrow x_0$ equivalgono a $x \to x_0^-$ e $x \to x_0^+$, rispettivamente.
Per determinare eventuali asintoti orizzontali calcoliamo i seguenti limiti:

[1] Questo esercizio e la maggior parte dei seguenti sono tratti da *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, pagg. 491 e 492.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la retta di equazione $y = 0$ (cioè l'asse delle ascisse) è l'unico asintoto orizzontale (sia *a destra* che *a sinistra*). Di conseguenza non può esistere un asintoto obliquo.

Un consiglio, valido soprattutto per i principianti in questo tipo di esercizio: la maggiore difficoltà spesso si incontra nel momento in cui si devono sintetizzare in un grafico tutte le informazioni assunte sulla funzione; queste informazioni sono di solito piuttosto numerose e a volte non è facile districarsi. Si faccia quindi, almeno per le funzioni più semplici, un "grafico provvisorio" che riporti i risultati ottenuti dalla determinazione degli zeri, del segno e di eventuali asintoti della funzione.

In questo caso il grafico potrà essere come il seguente:

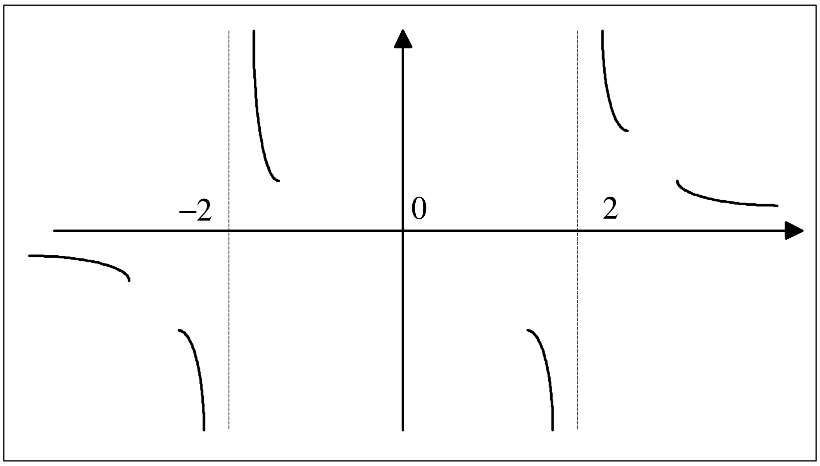

Fig. 1

Naturalmente il grafico è incompleto e restano ancora da individuare numerose importanti caratteristiche, tuttavia si riesce spesso ad avere un'idea abbastanza precisa del suo andamento.

Calcoliamo ora la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-4) - 2x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -2\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}.$$

Questa è ovviamente di segno negativo per ogni x appartenente al dominio naturale di definizione della funzione, dunque questa è strettamente decrescente ed è quindi priva di punti di massimo o di minimo relativo.

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$$f''(x) = -2\,\frac{2x \cdot (x^2-4)^2 - (x^2+4) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

Poiché il fattore $x^2 + 12$ è certo > 0 per ogni x, il segno della derivata seconda sarà positivo (e quindi la funzione sarà strettamente convessa) per i valori di x in corrispondenza dei quali i termini x e $(x^2 - 4)$ sono concordi; sarà invece negativo (quindi la funzione sarà strettamente concava) nel caso in cui i detti termini sono discordi.
La situazione del segno della derivata seconda è quindi analoga a quella descritta nella precedente tabella del segno della funzione stessa.

Poiché la funzione è strettamente convessa per $x \in\ ]-2; 0[$ e strettamente concava per $x \in]0; 2[$ ed è $f''(0) = 0$, l'origine è un punto di flesso.

Si tracci manualmente il grafico della funzione sulla base delle informazioni ottenute; in una Attività della Scheda n. 21 si potrà controllare il proprio risultato confrontandolo con il grafico ottenuto con *DERIVE*. Riportiamo comunque qui di seguito in Fig. 2 il grafico della funzione e i suoi asintoti.

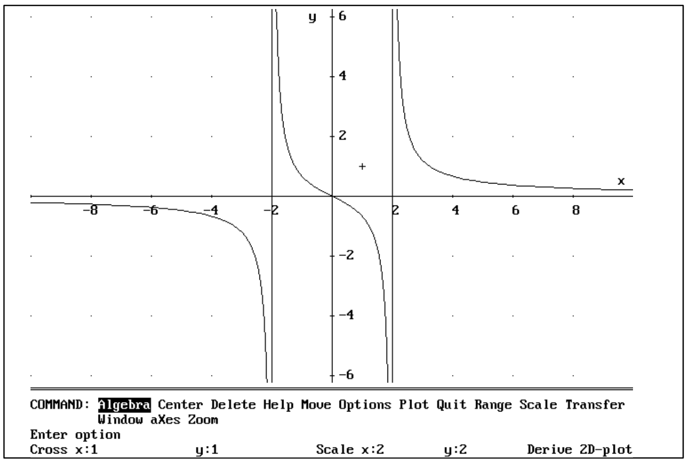

Fig. 2

OSSERVAZIONE: Si noti che talvolta la traccia seguita per realizzare lo studio della funzione può essere ridondante, nel senso che certe informazioni sull'andamento del grafico della funzione possono essere ricavate da altre. Ad esempio, nell'esercizio appena svolto, si sarebbe potuto studiare la funzione solo per $x > 0$, utilizzando poi il fatto che la funzione è dispari e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine; se poi, ad esempio, una funzione è continua nell'intervallo $]-2; 2[$, è strettamente decrescente in tale intervallo ed ha uno zero per $x = 0$, ne risulta che il suo segno è positivo per $x \in\ ]-2; 0[$ e negativo per $x \in\ ]0; 2[$.
Tuttavia non è necessario cercare sempre la massima efficienza possibile nello studio della funzione: eventuali "sovrapposizioni" nelle informazioni trovate sono spesso utili come controllo della esattezza del proprio lavoro.

<ins>ATTIVITA' N. 2:</ins>
Studiare la seguente funzione:

$$f(x) := \frac{x^2}{2x+1}.$$

Il dominio naturale di definizione è ogni x reale $\neq -1/2$.
Il grafico della funzione interseca gli assi coordinati nell'origine ed il segno della funzione è lo stesso del suo denominatore, vale a dire positivo per $x > -1/2$, negativo per $x < -1/2$.
Poiché

$$\lim_{x \uparrow -1/2} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \downarrow -1/2} f(x) = +\infty,$$

la retta $x = -1/2$ è un asintoto verticale.
Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

non esistono asintoti orizzontali.

Vediamo allora se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2+x} = \frac{1}{2}.$$

Indicando con *m* il limite finito ora ottenuto, avremo:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{2x+1} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{4x+2} = -\frac{1}{4}.$$

Quindi esiste un asintoto obliquo di equazione $y = 1/2\ x - 1/4$, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

Si ha

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1) - x^2 \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}.$$

Tenendo presente che la funzione non è definita per x = –1/2, avremo così che la funzione risulta strettamente crescente per $x \in\ ]-\infty; -1[$ o per $x \in\ ]0,+\infty[$, strettamente decrescente per $x \in\ ]-1; -1/2[$ o per $x \in\ ]-1/2; 0[$.

Il punto di coordinate (–1; 1) è quindi un punto di massimo relativo ed il punto di coordinate (0; 0) è di minimo relativo.

Si ha

$$f''(x) = \frac{(4x+2)(2x+1)^2 - (2x^2+2x) \cdot 2(2x+1) \cdot 2}{(2x+1)^4} = \frac{4x+2}{(2x+1)^4} = \frac{2}{(2x+1)^3},$$

quindi la funzione è convessa per $x > -1/2$, concava per $x < -1/2$; non esistono punti di flesso.

Il grafico della funzione è quindi il seguente:

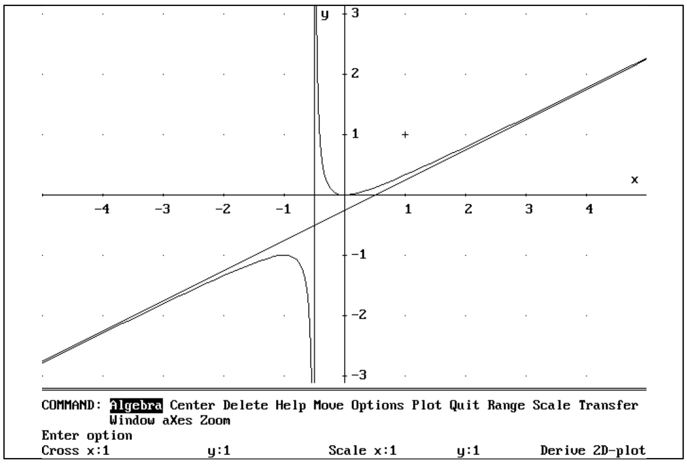

Fig. 3

ATTIVITA' N. 3:

Studiare la seguente funzione:

$$f(x) := \sqrt{x^2+x} - x.$$

Il dominio naturale di definizione è dato da ogni x tale che sia $x^2 + x \geq 0$; quindi la funzione non è definita per $x \in\ ]-1; 0[$.

Se $x > 0$, avremo

$$\sqrt{x^2+x} \geq \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

Se $x \leq -1$, avremo

$$\sqrt{x^2+x} \geq 0 > -1 \geq x.$$

La funzione è quindi non negativa per ogni x appartenente al dominio naturale di definizione.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right) =$$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$; moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x} + x$ si ottiene

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

dividendo numeratore e denominatore per x,

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Quindi la retta $y = 1/2$ è un asintoto orizzontale *a destra*, ossia per $x \to +\infty$.
Si noti però che

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \right)$$

non è una forma indeterminata ma diverge a $+\infty$.
Possiamo quindi indagare sull'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x} =$$

Poiché anche in questo caso si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞, è opportuno dividere sia il numeratore che il denominatore per x.
Si faccia però attenzione al fatto che

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, \text{ se } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

Quindi, poiché il fattore $1/x$ può essere considerato negativo, dato che $x \to -\infty$, il limite considerato è:

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+1/x} - 1}{1} = -2.$$

Indicando con m il limite ora trovato, calcoliamo ora il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x + 2x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} + x \right).$$

Poiché si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$, ricorriamo all'accorgimento di moltiplicare e dividere l'espressione per $\sqrt{x^2+x} - x$.
Il limite cercato diventerà così:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} - x}.$$

Si tratta ancora di una forma indeterminata del tipo ∞/∞: dividendo numeratore e denominatore per x e tenendo conto dell'osservazione prima fatta, si ottiene:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+1/x} - 1} = -\frac{1}{2}.$$

Dunque esiste un asintoto obliquo a sinistra, cioè per $x \to -\infty$, di equazione

$$y = -2x - \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1.$$

Per valutarne il segno basterà osservare che, se $x < -1$, si tratta della somma di due addendi negativi e quindi è negativa; se $x > 0$, sia il numeratore che il denominatore della frazione sono positivi; si dovrà così risolvere la disequazione

$$2x+1 > 2\sqrt{x^2+x}\ .$$

Poiché, come si è detto, le espressioni a primo e a secondo membro sono entrambi positive, la disequazione equivale a quella ottenuta elevando al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza:

$$4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x$$

che è verificata per ogni x.
In definitiva la funzione risulta strettamente decrescente per $x \le -1$, strettamente crescente per $x \ge 0$.
Per $x = -1$ e per $x = 0$ la funzione ha quindi un minimo relativo. Poiché $f(-1) = 1$ ed $f(0) = 0$, l'origine è il punto di minimo assoluto.

Per concludere calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 2\sqrt{x^2+x} - (2x+1) \cdot 2\,\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{4(x^2+x)} = \frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \frac{-1}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}.$$

Poiché questa è negativa per ogni x appartenente all'insieme naturale di definizione della funzione, la funzione data è concava e quindi priva di punti di flesso.
Il grafico della funzione è dunque il seguente (per maggior chiarezza sono stati tracciati anche gli asintoti):

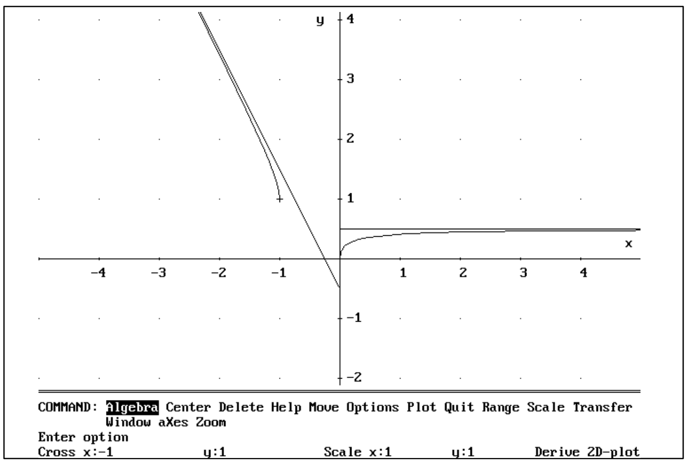

Fig. 4