Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **22**

ARGOMENTO: Integrali - parte prima.

(LEZIONI n. 26, 27, 28)

ATTIVITA' N. 1:

In questa Attività vogliamo costruire le funzioni *parte positiva* e *parte negativa* della funzione $f(x)$, come descritto a pag. 296 del Testo di Riferimento.

Selezionare **Author** e digitare **y:=**<↵>.

Selezionare **Author** e digitare **ppos(y):=max(y,0)** <↵>.

Selezionare **Author** e digitare **pneg(y):=max(-y,0)** <↵>.

E' necessario usare la variabile **y** anzichè l'espressione **f(x)** perché *DERIVE* non accetta funzioni come argomento di nuove funzioni.

E' interessante vedere come *DERIVE* realizza la funzione **max**: evidenziare la definizione della funzione **ppos(y)** e selezionare **Simplify**. Il lettore curioso potrà anche esaminare come viene realizzata la funzione **max** con tre o più argomenti ed indagare sul (facile) algoritmo per realizzarla.

Scegliere una funzione a proprio piacimento e visualizzare con il comando **Plot** i grafici di **ppos(y)**, **pneg(y)**, **ppos(y) - pneg(y)**, **ppos(y) + pneg(y)**.

ATTIVITA' N. 2:

In questa Attività si metteranno a confronto i valori assunti da una funzione $f(x)$, da una sua primitiva *prim*(x) e il valori della *funzione integrale* [1] $\int_a^x f(t)\,dt$, ove a è un valore scelto ad arbitrio. Come è noto, se la funzione è non negativa nell'intervallo specificato, la funzione integrale rappresenta l'area del trapezoide delimitato dall'asse delle ascisse, dal grafico della funzione $f(x)$ e dalle rette perpendicolari all'asse delle ascisse passanti per i punti di ascissa a e x. Ovviamente tale area varia al variare di x.

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=** <↵>.

Come è noto, tale definizione "a vuoto" serve per informare *DERIVE* che l'espressione $f(x)$ va interpretata come una funzione, anche se ancora non esplicitamente dichiarata, e non come il prodotto tra le variabili f ed x (con quest'ultima chiusa tra parentesi).

Selezionare **Author** e digitare **prim(x):=** <↵>.

Vale quanto detto qui sopra; si noti che in questo modo **prim** viene "letto" da *DERIVE* come identificatore di funzione senza bisogno di selezionare **Mode: Word** (v. Scheda n. 13, Attività n. 5).

Selezionare **Author** e digitare **tfond(a):=vector([x,f(x), int(f(t),t,a,x), prim(x)], x, a, a+5, 0.2)`** <↵>.

La funzione **tfond**, che vuole offrire una "verifica sperimentale" del Teorema Fondamentale, crea grazie alla ben nota funzione **vector** una tabella (per esattezza, una

---

[1] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"*, ed. Zanichelli, paragrafo 5.2 a pag. 299.

matrice: v. Scheda n. 15) che riporta in ciascuna sua riga rispettivamente i valori di x, di $f(x)$, di una primitiva di $f(x)$ e della funzione integrale. La variabile indipendente x viene fatta variare, ad esempio, da **a** ad **a + 5** a passo di **0.2**.
Il simbolo ` (di "apice inverso") non è direttamente accessibile da tastiera e si ottiene tenendo premuto il tasto <**alt**> e digitando il corrispondente codice ASCII, cioè **096**.
Tale simbolo, posto dopo una matrice, opera una trasposizione su di essa cioè fa scambiare tra loro le righe e le colonne; questo renderà la matrice meglio leggibile dall'utente.
La funzione **int(f(t),t,a,x)** rappresenta l'integrale della funzione $f(t)$ calcolato da a ad x, cioè il valore della funzione integrale.

La funzione **f(x)** sarà scelta dall'utente, che dovrà anche calcolare (volutamente a mano) la funzione **prim(x)**.
Poichè le nostre abilità nel calcolo di una primitiva sono ancora scarse, procederemo "alla rovescia" in questo modo:
Selezionare **Author** e digitare **prim(x):= 1/6 x^2 <↵>**.
Viene così definita una primitiva della funzione $f(x)$.
Calcoliamo ora la sua derivata: 1/3 x^3 (non c'è bisogno per scomodare *DERIVE* per così poco). Poiché questa è la derivata di **prim(x)**, **prim(x)** sarà per definizione una primitiva di essa.
Selezionare **Author** e digitare **f(x):= 1/3 x <↵>**.
Selezionare **Author** e digitare **m:= tfond(1) <↵>**.
Viene creata la tabella (ovvero matrice) prima descritta e viene assegnata alla variabile *m*. Questa assegnazione ci sarà utile tra poco per poter manipolare agilmente tale tabella.
Selezionare **Simplify**.
Appare la tabella desiderata. In questa forma però essa è poco "leggibile". Cercheremo ora di trasformarla in forma grafica.
Selezionare **Author** e digitare **[m sub 1, m sub 2]` <↵>** [2] .
Selezionare **Simplify**.
Si noti la presenza del simbolo di "apice inverso" (<**alt**> + **096**) di cui si è parlato poco fa.
Appare una nuova matrice i cui elementi sono vettori bidimensionali costituiti, rispettivamente, dagli elementi della prima riga (**m sub 1**) e della seconda riga (**m sub 2**) della matrice **m**. Si tratta quindi di punti che appartengono al grafico della funzione **f(x)** (si ricordi come è stata definita la funzione **tfond**).
Selezionare **Plot**, selezionare **Options State** e, nel campo **Mode**, selezionare **Connected**.
Come si è già visto (v. Schede n. 9 e n. 21) con questa opzione i punti saranno tracciati congiunti da una linea spezzata. In questo modo viene "simulato per punti" il grafico della funzione $f(x)$, limitatamente all'intervallo [a, a+5], cioè nel nostro caso [1,6].
Selezionare **Plot**.
Appare il "grafico" della funzione $y = x$.
Tornare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare **[m sub 1, m sub 3]` <↵>**.
Selezionare **Simplify** e poi **Plot**.

---

2 La funzione **sub** è disponibile in *DERIVE* solo a partire dalla versione 3.

Appare il "grafico per punti" della funzione integrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ove a è l'argomento della funzione **tfond**, cioè in questo caso 1.

Tornare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare **[m sub 1, m sub 4]`** <↵>.
Selezionare **Simplify** e poi **Plot**.

Appare il "grafico per punti" della primitiva **prim(x)**.

In Fig. 1 è riportato il grafico che si ottiene dopo questi comandi; la scala è stata opportunamente modificata con il comando **Range** (v. Scheda n. 15).

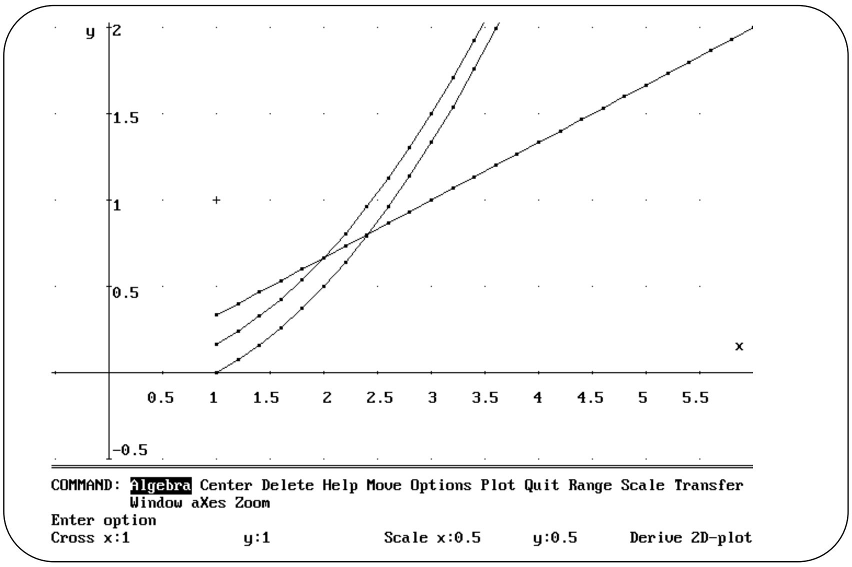

Fig. 1

Dall'esame di tale grafico appare che la funzione integrale (calcolata per punti) e la primitiva differiscono di una costante, dato che i loro grafici possono essere sovrapposti con una traslazione verticale.

Tornare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare: **m sub 3 - m sub 4** <↵>.

Appare, come al solito organizzato sotto forma di vettore, la differenza tra il valore che assume la primitiva e il valore della funzione integrale in ciascuno dei punti presi in esame. Tale differenza appare, come previsto, costante.

Ripetere le precedenti azioni (definizione della primitiva, calcolo della funzione, creazione della matrice *m*, estrazione da essa degli insiemi di punti ecc.) con altre funzioni, ad esempio **prim(x):= cosx**, con **a** = **-π**, **prim(x):=ln abs x** con **a = 0.1**, **prim(x):= -1/3x^3+x^2** con **a = 0**; perchè in questo ultimo esempio i grafici della primitiva e della funzione integrale coincidono?

✍ ATTIVITA' N. 3:

Per ciascuna delle funzioni di seguito indicate, si determini la totalità delle primitive (vale a dire l'integrale indefinito): [3]

a) $f(x) := 2x - 4$; b) $f(x) := 2x^3 - 4x^2 + 5$;

[3] La maggior parte di questi esercizi e dei successivi sono tratti da: *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - Ed. Zanichelli, pag. 307, 496 e 497.

c) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) := x\sqrt[3]{x^2}$;

e) $f(x) := 5\cos x + 2$; f) $f(x) := 3/x - e^{x+2}$.

Utilizzeremo le proprietà "di linearità"

$$\int c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

e le formule di integrazione a pag. 305 del Testo di riferimento.

a) $\int(2x-4)\,\mathrm{d}x = 2\int x\,\mathrm{d}x - 4\int 1\,\mathrm{d}x = x^2 - 4x + c.$

b) $\int(2x^3 - 4x^2 + 5)\,\mathrm{d}x = 2\frac{1}{4}x^4 - 4\frac{1}{3}x^3 + 5x + c = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5x + c.$

c) La funzione data può essere scritta nella forma $x^{-1/2}$, quindi

$$\int x^{-1/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

d) Utilizzando le note proprietà, la funzione può essere scritta nella forma $x^{5/3}$.
Quindi

$$\int x^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{5}{3}+1}x^{\frac{5}{3}+1} + c = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + c.$$

e) $\int(5\cos x + 2)\,\mathrm{d}x = 5\int \cos x\,\mathrm{d}x + 2x + c = 5\sin x + 2x + c.$

f) $\int(\frac{3}{x} - e^{x+2})\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - e^2\int e^x\mathrm{d}x = 3\ln|x| - e^2e^x + c.$

ATTIVITA' N. 4:

In questa Attività si vuole calcolare con *DERIVE* la primitiva della funzioni viste nell'Attività n. 3.

Selezionare **Author** e digitare la prima delle funzioni: **2x-4** <↵>.

Selezionare **Calculus Integrate**, premere <↵> per confermare di voler operare con l'espressione ora digitata, premere ancora <↵> per confermare la variabile indipendente *x*, premere ancora <↵> senza digitare nulla nei campi **Lower Limit** ed **Upper Limit** per confermare di volere una primitiva della funzione digitata.

Compare il noto simbolo di integrale indefinito.

Selezionare **Simplify.**

Compare una primitiva della funzione data. Si noti che non appare la totalità delle primitive (evidenziate dal termine + *c*) ma solo una di esse.

Ripetere le precedenti azioni per la altre funzioni viste nell'Attività n. 3. Si faccia attenzione a digitare correttamente le funzioni d) ed e): ad esempio la d) dovrà essere digitata nella forma: **x x^(2/3)**.

Un altro modo per ottenere lo stesso risultato è attraverso la funzione **int**:
Ad esempio, per la funzione c), selezionare **Author**, digitare **int(1/√x, x)** <↵> ed infine selezionare **Simplify**.

ATTIVITA' N. 5:

Selezionare **Author** e digitare la funzione **x/(x+1)** <↵>.

Selezionare **Calculus Differentiate**, poi **Simplify** per calcolare la derivata della funzione digitata.

Si ottiene il risultato

$$\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Selezionare **Calculus Integrate**, poi **Simplify** per ottenere la primitiva della funzione.

Essendo la primitiva della derivata precedentemente calcolata, è logico aspettarsi come risultato la stessa funzione da noi inizialmente digitata: **x/(x+1)**.
DERIVE fornisce invece il seguente risultato:

$$-\frac{1}{x+1}.$$

La cosa non deve stupire: le due funzioni, quella digitata e quella fornita da *DERIVE*, differiscono di una costante, come è facile verificare:

$$\frac{x}{x+1}-\left(-\frac{1}{x+1}\right)=1$$

e quindi sono entrambi primitive di $1/(x+1)^2$.

Ripetere l'esperimento (calcolo della derivata e ricerca della primitiva del risultato ottenuto) con la funzione $f(x) := \ln(3x)$.

E' necessario quindi fare attenzione: talvolta il risultato della ricerca della primitiva calcolata con *DERIVE* può essere diverso dal risultato calcolato manualmente: prima di pensare ad un errore o a un malfunzionamento di *DERIVE*, si verifichi che i due risultati non differiscano di una costante.

<u>ATTIVITA' N. 6:</u>

Per ciascuna delle funzioni di seguito indicate, si determini la totalità delle primitive (vale a dire l'integrale indefinito):

a) $f(x) := x\sqrt{1-x^2}$; b) $f(x) := \dfrac{1}{x^2+2x+1}$;

c) $f(x) := \dfrac{\ln^3 x}{x}$; d) $f(x) := 3^x$;

e) $f(x) := \operatorname{tang} x$; f) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}$;

g) $f(x) := \dfrac{1}{1+4x^2}$; h) $f(x) := \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

Per risolvere questi esercizi useremo le formule riportate nella Tabella 5.2-2 a pag. 306 del Testo di riferimento.

a) La funzione può essere presentata come prodotto della potenza di una funzione per la derivata della funzione stessa (primo caso in tabella).
Infatti

$$x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2}\cdot(-2x).$$

Quindi le primitive cercate saranno

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1/2+1}(1-x^2)^{1/2+1}+c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+c.$$

b) Anche il questo caso la funzione può essere presentata come prodotto della potenza di una funzione per la derivata della funzione stessa. Infatti

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = (x+1)^{-2}.$$

Applicando la prima formula in tabella, le primitive cercata sono:

$$\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}+c=\frac{-1}{x+1}+c.$$

c) Ancora una volta la funzione può essere presentata come prodotto della potenza di una funzione per la derivata della funzione stessa; infatti $1/x$ è la derivata di $\ln|x|$. Quindi le primitive sono:

$$\frac{1}{3+1}\ln^{3+1}|x|+c=\frac{1}{4}\ln^{4}|x|+c.$$ [4]

d) Per definizione della funzione logaritmo, la funzione data può essere espressa nella forma

$$3^x=e^{\ln 3^x}=e^{x\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\ln 3.$$

La funzione $e^{x\ln 3}\ln 3$ è del tipo $e^{f(x)}f'(x)$, ove $f(x) := x \ln 3$, quindi $e^{x\ln 3}=3^x$ è una sua primitiva.
Le primitive cercate sono così

$$\frac{1}{\ln 3}3^x+c.$$

e) Utilizzando una nota formula di trigonometria e operando un doppio cambiamento di segno, la funzione data si può presentare nella forma

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{-\sin x}{\cos x}.$$

Si ottiene così la classica configurazione di una frazione nella quale, a parte il segno che la precede, che non è rilevante perché può essere pensato come il fattore -1, il numeratore è la derivata del denominatore. Le primitive cercate sono così (V. seconda formula in tabella):

$$-\ln|\cos x|+c.$$

f) La funzione data si può esprimere nella forma

$$\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1},$$

quindi anche in questo caso otteniamo una frazione nella quale il numeratore è la derivata del denominatore. La primitive cercate sono:

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c.$$

g) Si ha

$$\frac{1}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+(2x)^2}.$$

Quindi (V. penultima formula in tabella) le primitive cercate sono

$$\frac{1}{2}\arctan(2x).$$

h) La funzione data richiama la situazione descritta nell'ultima formula in tabella, con $f(x) := x^3$. Il numeratore però dovrebbe essere la derivata della funzione, $3x^2$, ma manca il coefficiente 3. Come già visto in casi precedenti, è facile rimediare:

---

[4] Poiché il dominio naturale di definizione della funzione data è $x > 0$, il simbolo di valore assoluto può essere omesso.

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}}.$$

Quindi le primitive cercate sono

$$\frac{1}{3} \arcsin x^3 + c.$$

<u>ATTIVITA' N. 7:</u>

Studiare la funzione

$$f(x) := \int_0^x \sqrt{t\,(2-t)}\ \mathrm{d}t.$$

Si tratta di una funzione integrale.
Poiché la funzione integranda ha l'intervallo [0, 2] come dominio naturale di definizione, anche l'estremo di integrazione x deve essere appartenente a quell'intervallo.
La funzione integranda è non negativa per ogni x appartenente al dominio, quindi è tale anche la $f\,(x)$ e questa risulta crescente per ogni x interno all'intervallo [0, 2].
Applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f'(x) = \sqrt{x(2-x)}\ ,$$

che infatti è positiva per ogni x interno all'intervallo [0, 2].
I punti di ascissa 0 e 2 sono rispettivamente punto di minimo e di massimo assoluti della funzione.

$$f''(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{x(2-x)}}.$$

Quindi nel punto di ascissa $x = 1$ il grafico della funzione presenta un punto di flesso.

DERIVE è in grado di tracciare il grafico di una funzione integrale.
Si consiglia però di selezionare **Simplify** dopo aver digitato la funzione e prima di impartire il comando **Plot**, per rendere più veloce l'operato di *DERIVE*. In realtà si riesce ad avere anche direttamente il grafico della funzione integrale, ma il tempo di esecuzione potrebbe essere molto lungo.

SINTESI

<u>MENU</u>

Per calcolare una primitiva di una funzione appena digitata, selezionare **Calculus Integrate**, premere <↵> per confermare l'espressione evidenziata, premere <↵> per confermare la variabile suggerita (oppure, se necessario, digitare la variabile desiderata), premere <↵> per lasciare indefiniti i campi **Lower limit** ed **Upper limit**. Selezionare **Simplify**.

<u>FUNZIONI</u>

Semplificando **int(f(x), x,a,b)** si ottiene l'integrale definito della funzione **f(x)** sull'intervallo [**a**, **b**].
Semplificando **int(f(x), x)** si ottiene una primitiva della funzione **f(x)**.
La funzione **f(x)** può essere digitata direttamente all'interno della funzione **int**, oppure, se è già stata definita, si può usare il suo identificatore.
int(#n,x) fornisce una primitiva di una funzione nella variabile **x** che è stata precedentemente digitata e che compare nell'ambiente di Algebra alla linea numero **n**.
Lo stesso effetto della funzione **int(f(x),x)** può essere prodotto con la funzione **dif(f(x),x,-1)**.
E' possibile ottenere perfino le "primitive successive", cioè la primitiva della primitiva .... di **f(x)** con la funzione **dif(f(x),x,n)**, ove **n** è un numero intero < 0.

m sub n genera un vettore costituito dagli elementi della **n**-esima riga della matrice **m**.
m` (una matrice seguira dal simbolo di "apice inverso") restituisce la matrice trasposta della matrice **m** (cioè la matrice ottenuta scambiando tra loro le righe con le colonne di **m**).
Il simbolo di apice inverso non è presente in tastiera e si ottiene tenendo premuto il tasto <**alt**> e digitando sul tastierino numerico il corrispondente codice ASCII **096**.

Semplificando **max(a,b,c,....)** si ottiene il maggiore tra gli elementi indicati nell'argomento.