Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **23**

ARGOMENTO: Integrali - parte seconda.

(LEZIONI n. 28, 30, 31)

ATTIVITA' N. 1:

Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x; \qquad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x.$$

Utilizzeremo le formule della Tabella 5.2-2 a pag. 306 e il Corollario a pag. 302 del Testo di riferimento.

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\,.$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+x)^{-1/2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{-1/2+1}\,(1+x)^{-1/2+1}\right]_0^1 = \left[2\sqrt{(1+x)}\,\right]_0^1 =$$
$$= 2(\sqrt{2}\ -1).$$

ATTIVITA' N. 2:

Calcolare con *DERIVE* gli integrali definiti risolti nella precedente Attività.

Selezionare **Author**, digitare la prima delle due funzioni e infine premere <↵> per confermare.

L'espressione digitata appare evidenziata sullo schermo.

Selezionare **Calculus Integrate**, premere <↵> per confermare di voler operare con la funzione evidenziata, premere ancora <↵> per confermare la variabile **x**, nel campo **Lower limit** digitare il primo degli estremi di integrazione, nel nostro caso **0**, premere il tasto di tabulazione **<tab>** per passare al campo **Upper limit** e digitare il secondo estremo di integrazione, cioè **1**, premere <↵> per confermare.

Sullo schermo di Algebra appare il simbolo dell'integrale da calcolare.

Selezionare **Simplify**.

Appare il risultato desiderato.

Ripetere le azioni ora viste per calcolare anche il secondo degli integrali proposti.

ATTIVITA' N. 3:

Per ciascuna delle funzioni di seguito indicate, calcolare la primitiva F che assume il valore specificato. [1]

$$\text{a) } f(x) := \cos x - 1,\ \ F(\pi) = 0; \qquad \text{b) } f(x) := \frac{x}{1+x^2}\,,\ \ F(-1) = 1.$$

a) L'esercizio consiste nel determinare la totalità delle primitive $F(x) + c$ della funzione $f(x)$ e nell'individuare il valore della costante c attraverso il valore indicato.

---

[1] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, esercizi n. 80 e 95 a pag. 497 e 498.

Le primitive della funzione proposta sono $\sin x - x + c$.
Imponendo la condizione data, cioè che la primitiva assuma valore uguale a 0 per $x = \pi$, avremo $\sin\pi - \pi + c = 0$ da cui si ottiene $c = \pi$ e quindi la primitiva cercata è

$$F(x) = \sin x - x + \pi.$$

b) La totalità delle primitive della funzione proposta è stata trovata nell'Attività n. 6 della Scheda n. 22 (es. f):

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$$

Procedendo come nel precedente esercizio avremo: $1/2 \ln 2 + c = 1$, da cui si ottiene

$$c = 1 - 1/2 \ln 2$$

e la primitiva cercata è

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 1 - \frac{1}{2}\ln 2,$$

che si può anche esprimere nella forma

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{2} + 1.$$

Si vogliono ora interpretare geometricamente i risultati degli esercizi ora svolti, utilizzando le capacità grafiche di *DERIVE*.
Digitare la prima funzione e calcolarne una primitiva con l'ormai ben noto comando **Calculus Integrate**.

Poiché si tratta di una integrazione indefinita, si ricordi di lasciare "vuoti" i campi **Lower limit** ed **Upper limit**, premendo <↵> senza digitare nulla

Selezionare **Author**, digitare **F(x):=** e premere **<F3>** <↵>.

La primitiva ottenuta viene richiamata nella linea di editing e sarà d'ora in poi individuata dall'identificatore **F(x)**.

Selezionare **Author**, digitare **vector(F(x)+c,c,-5,5)** <↵>, poi selezionare **Simplify**.

La totalità delle primitive, dipendenti dal parametro *c*, è una "famiglia" di funzioni aventi tutte la stessa derivata, i cui grafici sono ottenibili l'uno dall'altro con traslazioni lungo la direzione verticale.
La funzione **vector** determina alcune di queste funzioni, con il parametro **c** che varia da **-5** a **5** al passo di **1**.

Tracciare con il solito comando **Plot** il grafico del risultato ottenuto.
In ambiente di Algebra selezionare **Author**, digitare **[π, 0]** <↵> e selezionare ancora **Plot**.

Viene visualizzato sullo schermo il punto di coordinate $(\pi; F(\pi))$.
Si ricordi che il simbolo **π** si ottiene premendo il tasto della lettera **p** tenendo contemporaneamente premuto il tasto **<alt>**.

Risolvendo il nostro esercizio abbiamo trovato l'unica funzione appartenente alla famiglia di primitive il cui grafico passa per il punto avente le coordinate specificate.
Tracciare con *DERIVE* il grafico della funzione **F(x)+π** e verificare che passa per il punto desiderato.

Ripetere le stesse operazioni con le primitive calcolate nell'esercizio b).

<u>ATTIVITA' N. 4:</u>
Per le seguenti funzioni determinare un punto ξ appartenente all'intervallo $[a, b]$ specificato, in modo che valga il teorema della media integrale. [2]

a) $f(x) := -x^2 + 4$, $a = 1$, $b = 2$.
b) $f(x) := -x^2 + 4$, $b > a > 0$ arbitrari.
c) $f(x) := x^2 + 4$, $a = -1$, $b = 1$.

a) Il Corollario del teorema della media integrale (V. pag.310 del Testo di riferimento), assicura l'esistenza di un punto ξ tale che

$$f(\xi)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro:

$$\int_1^2 (-x^2+4)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(-\frac{1}{3}+4\right) = \frac{5}{3}.$$

Si ha

$$f(\xi)\,(b-a) = -\xi^2 + 4.$$

Basterà quindi risolvere l'equazione: $-\xi^2+4=\dfrac{5}{3}$

che ha le soluzioni

$$\xi = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}, \qquad \xi = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Solo la prima delle due soluzioni appartiene all'intervallo [1, 2] ed è quindi questo il punto previsto dal teorema.

b) Procediamo come nell'esercizio precedente.

$$\int_a^b (-x^2+4)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_a^b = -\frac{1}{3}(b^3-a^3)+4(b-a).$$

Si deve risolvere l'equazione

$$(-\xi^2+4)(b-a) = -\frac{1}{3}(b^3-a^3)+4(b-a).$$

Poiché $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, cambiando il segno ad entrambi i membri e dividendo per $b-a$, si ottiene l'equazione

$$\xi^2-4=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)-4$$

che ha le soluzioni

$$\xi = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}, \quad \xi = -\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

La prima di queste è il punto cercato.
Si osservi che questa soluzione, con le ipotesi che sono state fatte, è sempre interna all'intervallo $[a, b]$.
Infatti

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} > \sqrt{\frac{a^2+aa+a^2}{3}} = a;$$
$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} < \sqrt{\frac{b^2+bb+b^2}{3}} = b.$$

c) Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-1}^{1} (x^2+4)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-1}^{1} = \frac{26}{3}.$$

2 V. *G. C. Barozzi, op. cit.*, esercizio n. 278 a pag. 503.

Dovremo quindi risolvere l'equazione

$$2\,(\xi^2 + 4) = \frac{26}{3}.$$

Questa ha le soluzioni

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \xi = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si noti che, in questo caso, entrambi le soluzioni sono interne all'intervallo [– 1, 1]: infatti il citato Corollario assicura l'esistenza del punto ξ ma non la sua unicità.

<u>ATTIVITA' N. 5:</u>

Calcolare l'area della porzione limitata di piano delimitata dalle curve di equazioni:

a) $y = x^3$, $y = x^2$, $a \le x \le b$ dove a e b sono le ascisse dei punti in cui le due curve indicate si intersecano;

b) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 2x$, $0 \le x \le 5$.

a) Si osservi (V. Figura 5.3-2 a pag. 309 del Testo di riferimento) che l'integrale

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$$

rappresenta la differenza tra le aree degli insiemi ordinati della funzione g e della funzione f sull'intervallo $[a, b]$, quindi rappresenta l'area dell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\ \}.$$

Questo se $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$, continue e con $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (V. Fig. 1).
Sotto queste condizioni, calcolare l'area di una regione di piano compresa tra i grafici di f e di g è molto semplice: basterà, al più, fare attenzione a quale dei due grafici si trova "più in alto" nell'intervallo considerato.

Le curve proposte si intersecano nei punti le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3 = x^2$, quindi nei punti di ascissa $x = 0$ ed $x = 1$.
Si noti che nell'intervallo [0, 1] è $x^2 \le x^3$.
L'area cercata è quindi data dall'integrale:

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

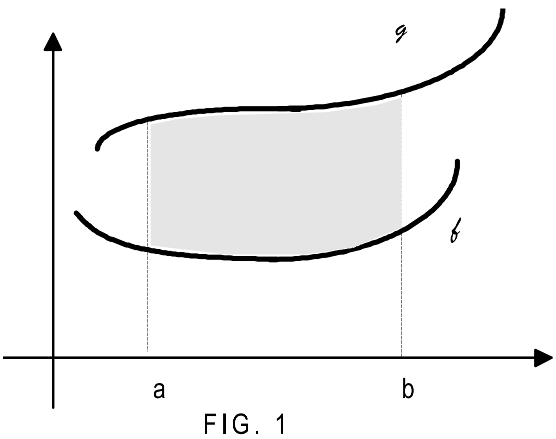

FIG. 1

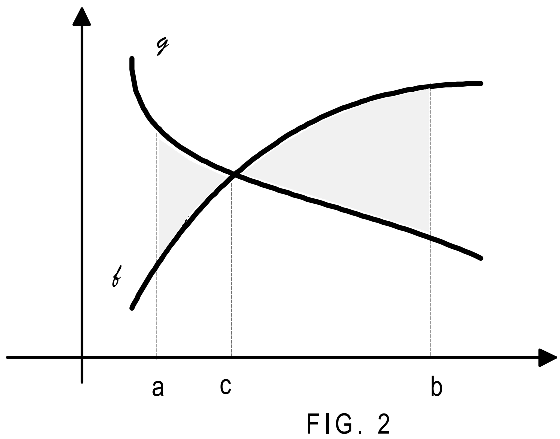

FIG. 2

Si osservi che non è rilevante il segno che le funzioni assumono nell'intervallo $[a, b]$: ad esempio se è $f(x) \le 0$ e $g(x) \ge 0$ per ogni x di $[a, b]$, l'integrale effettua la differenza tra due numeri, il primo positivo ed il secondo negativo, e quindi fornisce la somma delle aree dei due insiemi ordinati di g e di f, prese entrambi con segno positivo.

b) E' facile tracciare il grafico delle due funzioni $g(x) := x^2 - 4x + 5$ e $f(x) := 2x$.
Il grafico della prima funzione è una parabola che ha vertice nel punto (2; 1) e concavità rivolta verso l'alto; il grafico della seconda è una retta passante per l'origine.
I due grafici hanno in comune i punti (1; 2) e (5; 10).
Risolvendo la disequazione

$$x^2 - 4x + 5 \geq 2x,$$

si ottiene che è $g(x) \geq f(x)$ per $x \in [0, 1]$, mentre è $g(x) \leq f(x)$ per $x \in [1, 5]$.
Ci troviamo quindi in una situazione analoga a quella descritta dalla FIG. 2: per determinare l'area richiesta basterà calcolare la seguente somma di integrali:

$$\int_0^1 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x + \int_1^5 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x,$$

ove la funzione integranda è la differenza tra la maggiore e la minore tra f e g nell'intervallo considerato.

$$\int_0^1 (x^2 - 4x + 5 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

$$\int_1^5 (2x - x^2 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

L'area cercata è quindi uguale a 13.

ATTIVITA' N. 6:
In questa Attività si vuole costruire una funzione di *DERIVE* che permetta di calcolare l'area della regione di piano compresa tra i grafici di due funzioni continue in un intervallo specificato.
Anche se sarebbe piuttosto facile, grazie alle capacità grafiche e di calcolo di *DERIVE*, riconoscere in quali intervalli è maggiore la prima funzione e in quali la seconda, vogliamo rendere tutto automatico.
Selezionare **Transfer Clear** e premere **y** per azzerare il foglio di lavoro.
Selezionare **Author** e digitare **f(x):=** <↵>.
area Selezionare **Author** e digitare **g(x):=** <↵>.

Come si è già visto, *DERIVE* consente anche una definizione di funzione "vuota". In pratica questi comandi servono a far sì che l'interprete di *DERIVE* consideri, durante questa sessione di lavoro, il simbolo **f(x)** come una funzione e non come il prodotto tra le variabili **f** ed **x**.

Selezionare **Author** e digitare **area(a,b) := int(max(f(x), g(x)) - min(f(x), g(x)),x,a,b)** <↵>.

Viene così definita la funzione **area** che calcola l'integrale da **a** a **b** della differenza tra la maggiore e la minore delle due funzioni **f** e **g**.

Con questo semplice accorgimento, qualunque sia l'intervallo considerato, si ha la certezza di calcolare sempre l'area della differenza tra due insiemi ordinati in cui il secondo sia sempre incluso nel primo.

Selezionare **Transfer Save Derive** e, nel campo **file**, digitare il nome desiderato, ad esempio **area**; premere <↵> per confermare.

La funzione ora definita viene così salvata e sarà disponibile anche in altre sessioni di lavoro.

Selezionare **Transfer Clear** e premere **y** per azzerare il foglio di lavoro.

Selezionare **Transfer Load Utility** e, nel campo **file**, digitare **area**; premere <↵> per confermare.

La funzione area viene caricata da disco sotto forma di libreria di funzioni: sarà quindi disponibile anche se non appare sullo schermo di lavoro.

Selezionare **Author** e digitare **f(x):=x^3** <↵>.
Selezionare **Author** e digitare **g(x):=x^2** <↵>.
Selezionare **Author** e digitare **area(0,1)** <↵>.
Selezionare **Simplify**.

Si ottiene lo stesso risultato che si era calcolato manualmente nell'esercizio a) della precedente Attività.

Si verifichi allo stesso modo il risultato ottenuto nell'esercizio b).

<u>ATTIVITA' N. 7:</u>

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della seguente funzione, l'asse delle ordinate e la semiretta delle ascisse negative:

$$\text{a) } f(x) := \frac{e^x}{2+e^x}; \qquad\qquad \text{b) } f(x) := \frac{-1}{x-1}.$$

a) Come è facile verificare, la semiretta delle ascisse negative è un asintoto del grafico della funzione; si tratta dunque di una regione di piano illimitata.
Calcoliamo l'area di una parte di questa regione, con x compresa tra a e 0, con $a < 0$, determinando la primitiva delle funzione con la nota formula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

$$\int_a^0 \frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x = [\ln(2+e^x)]_a^0 = \ln 3 - \ln(2+e^a) = \ln\frac{3}{2+e^a}.$$

Per calcolare l'area della regione di piano richiesta basterà determinare il limite dell'area ora trovata per a che tende a $-\infty$.

$$\lim_{a\to-\infty} \ln\frac{3}{2+e^a} = \ln\frac{3}{2}.$$

b) Anche il grafico di questa funzione ha il semiasse negativo x come asintoto.
Procediamo come nell'esercizio precedente.

$$\int_a^0 -\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = [-\ln|x-1|]_a^0 = -\ln 1 + \ln|a-1| = \ln|a-1|.$$

Il limite dell'espressione ora trovata per a che tende a $-\infty$ non è un valore finito: in questo caso l'area della regione illimitata è infinita.

<u>ATTIVITA' N. 8:</u>

Calcolare una somma inferiore ed una somma superiore per gli integrali

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x; \qquad\qquad \text{b) } \int_{1/2}^{3/2} \frac{2x}{2x+1}\mathrm{d}x,$$

in modo che la differenza non superi 1/4 nel primo caso, 1/10 nel secondo caso. [3]

---

[3] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, es. 5.5-1 a pag. 331.

a) Sia σ_n la scomposizione finita dell'intervallo [1; 2] in n parti uguali.
Sarà così: $x_k := 1 + k/n$, $k = 0, 1, 2, ... , n$; $x_0 = 1$, $x_n = 2$.
Poiché la funzione data è decrescente, sarà:
$e_k = f(x_k) = \dfrac{n}{n+k}$; $\quad E_k = f(x_{k-1}) = \dfrac{n}{n+k-1}$, $k = 1, 2, ... n$.
Calcoliamo l'area del plurirettangolo [4] che ricopre il grafico della funzione $1/x$: esso rappresenta per l'appunto la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore.
Il k-esimo rettangolo sarà $[x_{k-1}, x_k] \times [e_k, E_k]$, $k = 1, 2, ... , n$ ed avrà area uguale a

$$1/n\,(E_k - e_k).$$

Poiché la funzione è decrescente, l'estremo inferiore e_k della funzione sull'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ coincide con l'estremo superiore E_{k+1} della funzione sull'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$, con $k = 1, 2, ... , n - 1$.
Quindi l'area del plurirettangolo sarà:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(E_k - e_k) = \frac{1}{n}[(E_1 - e_1) + (E_2 - e_2) + \;....\; + (E_{n-1} - e_{n-1}) + (E_n - e_n)] =$$
$$= \frac{1}{n}[(E_1 - E_2) + (E_2 - E_3) + \;....\; + (E_{n-1} - E_n) + (E_n - e_n)] = \frac{1}{n}(E_1 - e_n) =$$
$$= \frac{1}{n}(f(1) - f(2)) = \frac{1}{2n}.$$

Si vuole che sia

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{4}$$

che equivale a $2n \geq 4$ ossia $n \geq 2$.
Se $n = 2$ la scomposizione finita σ è quella realizzata dall'insieme di punti {1, 3/2, 2}.
In tal caso la somma inferiore è

$$s(f; \sigma) = \frac{1}{2}f(3/2) + \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

mentre la somma superiore è

$$S(f; \sigma) = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}F(3/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

La differenza tra la somma superiore e la somma inferiore è proprio uguale a 1/4.

b) Sia σ_n la scomposizione finita dell'intervallo [1/2; 3/2] in n parti uguali.
Sarà così: $x_k := 1/2 + k/n$, $k = 0, 1, 2, ... , n$; $x_0 = 1/2$, $x_n = 3/2$.
La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{2(2x+1) - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2}{(2x+1)^2}$$

che è certo > 0, $\forall x \neq -1$.
La funzione è quindi crescente nell'intervallo considerato e sarà

$$e_k = f(x_{k-1}),\; E_k = f;(x_k).$$

Anche il questo caso la differenza tra la somma superiore e la somma inferiore sarà data dall'area del plurirettangolo che ricopre il grafico della funzione data.
Poiché la funzione è crescente, l'estremo superiore E_k della funzione sul k-esimo intervallo coincide con l'estremo inferiore e_{k+1} della funzione sul k+1-esimo intervallo.
Avremo così l'area del plurirettangolo:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(E_k - e_k) = \frac{1}{n}(E_n - e_1) = \frac{f(3/2) - f(1/2)}{n} = \frac{1}{4n}.$$

Si vuole che sia

4 V. Figura 5.5-9 a pag. 325 del Testo di riferimento.

$$\frac{1}{4n} \le \frac{1}{10}$$

che equivale a $n \ge 5/2 = 2.5$; poiché n deve essere un numero intero, si ha $n \ge 3$.
Se $n = 3$, la scomposizione finita σ è quella realizzata dall'insieme di punti {1/2, 5/6, 7/6, 3/2}.
In tal caso la somma inferiore è

$$s(f;\,\sigma) = \frac{1}{3}(f(1/2) + f(5/6) + f(7/6)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{7}{10}\right) = \frac{73}{120}$$

e la somma superiore è

$$S(f;\,\sigma) = \frac{1}{3}(f(5/6) + f(7/6) + f(3/2)) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{8} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4}\right) = \frac{83}{120}.$$

La differenza tra la somma superiore e la somma inferiore è 1/12 che infatti è < 1/10.

ATTIVITA' N. 9:
Calcolare i seguenti limiti: [5]

a) $$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \,....\, + \frac{1}{n+n}\right];$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \,....\, + \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}}\right].$$

a) La somma considerata può essere scritta nella forma

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

scegliendo in modo appropriato la funzione f.
Si tratta dunque di una somma di Riemann (pag. 328 del Testo di riferimento)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

relativa alla scomposizione finita σ realizzata dai punti $x_k = k/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sull'intervallo [0; 1] in cui $\xi_k = x_k$.
Il calcolo del limite si riconduce così al calcolo dell'integrale della funzione $f(x)$ da 0 ad 1.
Per individuare la funzione f basterà osservare che

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n+k} = \frac{1}{\frac{n+k}{n}} = \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

Quindi

$$f(x) := \frac{1}{1+x}.$$

Il limite cercato sarà così uguale al seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx\ ,$$

che è stato calcolato nell'Attività 1 di questa Scheda.

b) La somma considerata può essere scritta nella forma

---

5 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, esercizi n. 1 e n. 2 a pag. 495.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+(k-1)n}} =$$

raccogliendo n^2 e "portandolo fuori" dal radicale (si noti che il valore assoluto può essere omesso, dato che n è un numero naturale),

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k-1}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k-1}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right). \quad (1)$$

Si tratta quindi di una somma di Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

relativa alla scomposizione finita σ realizzata dai punti $x_k=k/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sull'intervallo [0; 1] in cui $\xi_k = x_{k-1}$.

Dalla (1) si ottiene la funzione f :

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Il limite cercato sarà così uguale al seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$$

che è stato calcolato nell'Attività 1 di questa Scheda.

SINTESI
MENU Per calcolare l'integrale definito di una funzione già digitata, evidenziarla se necessario con i tasti cursore, selezionare **Calculus Integrate**, premere <↵> per confermare l'espressione evidenziata, premere <↵> per confermare la variabile suggerita (oppure, se necessario, digitare la variabile desiderata), nel campo **Lower limit** digitare il primo estremo di integrazione, premere **<tab>** per passare al campo **Upper limit** e digitare il secondo estremo di integrazione. Premere <↵> per confermare. Selezionare **Simplify**.