Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **24**

ARGOMENTO: Integrali - parte terza.

(LEZIONI n. 29, 31)

ATTIVITA' N. 1:

Calcolare i seguenti integrali [1]

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x} \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} \mathrm{d}x$.

Tutti questi esercizi possono essere risolti utilizzando la formula di integrazione per parti [2]:

$$\int_a^b f(x)\, G(x)\, \mathrm{d}x = [F(x)\, G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x,$$

ove f è una funzione continua su $[a, b]$, F è una sua primitiva, G è una funzione derivabile su $[a, b]$ e $g := G'$ continua.

In tutti questi esercizi dovremo quindi presentare la funzione integranda sotto forma di prodotto di due funzioni, l'una delle quali interpreterà il ruolo di f e l'altra di G.

a) In questo caso conviene porre $G := x^2$, $f := e^{-x}$.

Quindi $F = -e^{-x}$, $g = 2x$.

L'applicazione della formula fornisce

$$\left[-e^{-x}x^2\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \cdot 2x\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 x\, e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Il calcolo dell'integrale proposto si riconduce quindi a quello dell'integrale che compare nel secondo membro. Questo, a sua volta, può essere facilmente calcolato per parti; sia $G := x$, $f := e^{-x}$, quindi $g = 1$.

$$\int_0^1 xe^{-x}\, \mathrm{d}x = [-e^{-x}x]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \mathrm{d}x = -\frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1.$$

Quindi l'integrale cercato è

$$-\frac{1}{e} + 2\left(-\frac{2}{e} + 1\right) = 2 - \frac{5}{e}.$$

b) Poniamo $G := x^2$, $f := \sin x \cos x$. Quindi $g = 2x$.

Una primitiva F di f è facile da determinare: si tratta del prodotto tra una funzione, $\sin x$, e la sua derivata, $\cos x$; perciò è

---

[1] Questi esercizi ed i seguenti sono tratti da *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica"* - ed. Zanichelli, pag. 499 e segg.

[2] V. Proposizione 5.4 a pag. 313 del Testo di riferimento.

$$F = \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

Dall'applicazione della formula dell'integrazione per parti si ottiene

$$\left[\frac{1}{2}\sin^2 x \cdot x^2\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2 x \cdot 2x\,dx = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{\pi/2} x\,\sin^2 x\,dx.$$

A sua volta l'integrale ora ottenuto potrà essere calcolato per parti, ponendo $G := x$, da cui $g = 1$.

E' noto [3] che una primitiva F di $\sin^2 x$ è

$$\frac{x - \sin x\,\cos x}{2},$$

quindi

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x\,dx = \left[\frac{x - \sin x\,\cos x}{2}\;x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{x - \sin x\,\cos x}{2}\,dx = \frac{\pi/2}{2}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x +$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} 2\sin x\,\cos x\,dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\left[\sin^2 x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

Quindi l'integrale proposto è

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}.$$

c) L'integrale può anche essere scritto nella forma

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx.$$

L'integrale proposto, essendo il prodotto di due funzioni di cui l'una è la derivata dell'altra, può essere calcolato facilmente determinando una primitiva come si è visto nell'Attività n. 6 della Scheda n. 22; tuttavia in questa sede preferiamo utilizzare la formula dell'integrazione per parti.

Poniamo dunque $f := 1/x$ e $G := \ln x$, quindi $F = \ln x$ e $g = 1/x$.

Applicando la formula dell'integrazione per parti,

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = [\ln x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}dx.$$

Si ottiene così una espressione che contiene lo stesso integrale di partenza. Il procedimento sembra quindi inefficace, ma se nella precedente uguaglianza spostiamo a primo membro l'integrale ottenuto, si ha

$$2\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[(\ln x)^2\right]_1^e,$$

e quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2}\left[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$$

d) Se poniamo $G := x$ e $f := \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, avremo $g := 1$.

Dobbiamo ora trovare una primitiva F di f.

$$F = \int \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \int \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}\,dx = \sqrt{1+2x}\;.$$

---

3 V. Esercizio 5.4-1 a pag. 316 del Testo di riferimento.

Applicando ancora una volta la formula dell'integrazione per parti, avremo

$$\left[x\sqrt{1+2x}\,\right]_0^4-\int_0^4\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x=12-\frac{1}{2}\int_0^4 2;(1+2x)^{1/2}\mathrm{d}x=12-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+2x)^3}\,\right]_0^4=$$

$$=12-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{9^3}-\frac{2}{3}\right)=12-9+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}.$$

ATTIVITA' N. 2:

Calcolare i seguenti integrali mediante opportune sostituzioni

a) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^3\frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$; d);$\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x$.

a) Poniamo $x=\varphi(t):=t^2-1$.

Tenendo presente che la funzione φ muta l'intervallo [0, 1] nell'intervallo $\left[1,\sqrt{2}\,\right]$,

e che $\varphi'(t)=2t$, si ha

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)^2}{t}\,2t\,\mathrm{d}t=2\int_1^{\sqrt{2}}(t^4-2t^2+1)\,\mathrm{d}t=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_1^{\sqrt{2}}=$$

$$=2\left(\frac{4}{5}\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1\right)=\frac{14}{15}\sqrt{2}-\frac{16}{15}.$$

b) Operiamo la stessa sostituzione del precedente esercizio: $x=\varphi(t):=t^2-1$.

$$\int_0^3\frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{2(t^2-1)+1}{t}\,2t\,\mathrm{d}t=2\int_1^2(2t^2-1)\,\mathrm{d}t=2\left[\frac{2}{3}t^3-t\right]_1^2=$$

$$=2\left(\frac{16}{3}-2-\frac{2}{3}+1\right)=\frac{22}{3}.$$

c) Poniamo $t=\tan\frac{x}{2}$, quindi $\frac{x}{2}=\arctan t$ e infine $x=\varphi(t):=2\arctan t$.

Una nota formula [4] ci fornisce la seguente uguaglianza:

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\int_0^1\frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t=$$

Risolviamo anche l'integrale ora ottenuto con il metodo di sostituzione: dividiamo sia il numeratore che il denominatore per 3:

$$=2\int_0^1\frac{1/3}{t^2/3+1}\,\mathrm{d}t=\ \text{ponendo}\ \frac{t}{\sqrt{3}}=\tau,$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\sqrt{3}/3}\frac{1}{\tau^2+1}\sqrt{3}\,\mathrm{d}\tau=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,[\arctan\tau]_0^{\sqrt{3}/3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\arctan 0\right)=$$

[4] V. Esercizio 2.4-4 a pag. 157 del Testo di riferimento.

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

d) Poniamo $\sqrt{e^x} = t \iff e^{x/2} = t \iff \frac{x}{2} = \ln t$, quindi

$$x = \varphi(t) := 2\ln t.$$

La funzione j muta l'intervallo [0, 1] nell'intervallo [1, $\sqrt{e}$] e $\varphi' = 2/t$.
Quindi

$$\int_0^1 x\sqrt{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{e}} 2\ln t \cdot t \cdot \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{e}} \ln t\mathrm{d}t.$$

E' noto [5] che una primitiva di $\ln x$ è $(x \ln x - x)$; quindi l'integrale cercato è

$$4[t\ln t - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln\sqrt{e} - \sqrt{e} - \ln 1 + 1) = 4\left(\frac{\sqrt{e}}{2} - \sqrt{e} + 1\right) = 4 - 2\sqrt{e}.$$

ATTIVITA' N. 3:

Calcolare i precedenti integrali con *DERIVE*.

Le procedure da seguire per il calcolo degli integrali (indefiniti e definiti) sono già state descritte nelle Schede n. 22 e 23 e non mutano nel caso di integrazioni per parti o per sostituzione: *DERIVE* è abbastanza "intelligente" da applicare automaticamente l'algoritmo più adatto per calcolare l'integrale proposto. L'unico "inconveniente" (di carattere didattico) è che mostra solo il risultato senza indicare il procedimento seguito per arrivare ad esso.

Di norma, soprattutto se non si tratta di un *integrale generalizzato*, cioè, in breve, di un integrale esteso ad un intervallo illimitato o in cui la funzione integranda è illimitata nell'intervallo considerato, *DERIVE* non ha problemi a fornire il risultato.

Talvolta però possono verificarsi comportamenti "strani". [6] Vediamo un paio di esempi.

Selezionare **Author** e digitare **sinx - cosx** <↵>.

Calcolare con *DERIVE* l'integrale da π/4 a π della funzione ora digitata.

DERIVE fornisce immediatamente il risultato, peraltro facilissimo da calcolare anche manualmente.

Si noti che la funzione proposta è non negativa nell'intervallo considerato e che ha un massimo assoluto nel punto di coordinate $\left(\frac{3}{4}\pi;\ \sqrt{2}\right)$.

Calcolare con *DERIVE* l'integrale della funzione **abs(sinx - cosx)** nello stesso intervallo.

Anche in questo caso non ci sono difficoltà.

Si noti che la funzione coincide con la precedente nell'intervallo specificato.

Calcolare con *DERIVE* l'integrale della funzione **abs(sinx - cosx - √2)** nello stesso intervallo.

Questa volta *DERIVE* sembra rifiutarsi di eseguire il calcolo: il programma lavora, ma anche dopo un'attesa di parecchi minuti non fornisce il risultato.

Si noti che la funzione entro valore assoluto è ≤ 0 per tutti gli x appartenenti all'intervallo considerato. Per la definizione di valore assoluto, le due funzioni

$$f(x) := \left|\sin x - \cos x - \sqrt{2}\right| \text{ e } g(x) := -\sin x + \cos x + \sqrt{2},\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$$

coincidono.

---

[5] V. Esempio 5.4-1 a pag. 299 del Testo di riferimento.

[6] A volte il comportamento di *DERIVE* varia anche a seconda della versione utilizzata.

Se si chiede a *DERIVE* di calcolare l'integrale della funzione scritta nella seconda forma, questo viene ora calcolato immediatamente.

Calcolare con *DERIVE* il seguente integrale indefinito: $\int e^x \sin(e^x+1)\,\mathrm{d}x$.

Si ricordi che la costante *e* va digitata in *DERIVE* premendo il tasto della lettera <**e**> insieme al tasto <**alt**>.

Selezionando **Simplify** *DERIVE* fornisce immediatamente il risultato richiesto, peraltro non difficile da calcolare anche manualmente tenendo conto che si tratta del prodotto del seno di una funzione per la derivata di tale funzione (v. Tabella 5-2.2 a pag. 306 del Testo di riferimento).

Facciamo calcolare a *DERIVE* quest'altro integrale: $\int (e^x+1)\,\sin(e^x+x)\,\mathrm{d}x$.
Si tratta, come è evidente, di un caso sostanzialmente identico al precedente e possiamo calcolarlo manualmente senza alcuna difficoltà. Per qualche strano motivo *DERIVE* invece ce lo restituisce praticamente inalterato il che equivale ad una sua ammissione di impotenza.

Vogliamo concludere questa Attività con un cenno alla integrazione delle funzioni razionali fratte (V. Appendice 6, pag. 360 e segg. del Testo di riferimento).
Chiave dei metodi di integrazione di questa classe di funzioni è la *scomposizione in fratti semplici,* cioè la trasformazione della funzione sotto forma di somma di frazioni proprie che hanno al denominatore un polinomio di primo grado o di secondo grado privo di zeri reali, più un eventuale polinomio.
La scomposizione in fratti semplici di una funzione razionale fratta viene realizzata con *DERIVE* selezionando, invece di **Simplify**, **Expand**.
Applicare il comando **Expand** a una qualunque funzione razionale fratta; ad esempio con le seguenti, relativi, rispettivamente, al caso di denominatore con due zeri reali distinti, tre zeri reali di cui due coincidenti, tre zeri di cui due complessi coniugati:

$$\frac{x^4+3x+1}{x^3-3x^2+4};\quad \frac{x-1}{2x^2+5x+3};\quad \frac{x+2}{x^3-2x^2+3x-6}.$$

ATTIVITA' N. 4:
Per calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare un insieme ordinato intorno ad uno degli assi coordinati o la lunghezza di un arco di curva, *DERIVE* fornisce delle funzioni predefinite (o quasi) nel file di Utility **int_apps.mth**.

Selezionare **Transfer Clear** per azzerare il foglio di lavoro, rispondendo **y** alla domanda "**Abandon expressions?**".
Selezionare **Transfer Load Utility** e, nel campo **file**, digitare **int_apps <↵>**.

Come è noto, un file di questo tipo viene caricato in memoria, ma senza essere visibile dall'utente. Un elenco completo delle funzioni disponibili può essere consultato, oltre ovviamente che nel manuale di *DERIVE,* selezionando **Help Utility** e selezionando **Next** fino ad ottenere le informazioni desiderate sul file **int_apps**.
Si esce dall'ambiente di Help selezionando **Resume**.

Digitare **volumex_of_revolution (y, x , x1 ,x2) := cylindrical_volume(r, 0, y, θ, 0, 2π, x, x1, x2)** <↵>. [7]

[7] La costruzione di questa funzione da parte dell'utente è consigliata dallo stesso manuale di *DERIVE*. Essendo una funzione definita dall'utente, avremmo anche potuto

Il carattere **π** si ottiene premendo il tasto della lettera **<p>** insieme al tasto **<alt>**, il carattere **θ** (la lettera *theta* dell'alfabeto greco) si ottiene premendo il tasto della lettera **<h>** insieme al tasto **<alt>**. [8]

La funzione **volumex_of_revolution (y, x , x1 ,x2)** viene così definita dall'utente attraverso la funzione predefinita **cylindrical_volume** e fornisce il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse dell'insieme ordinato

$$\{(x; z) \in \boldsymbol{R}^2;\ x_1 \le x \ \le x_2,\ 0 \le z \ \le y\}$$

ove y rappresenta la funzione che determina l'insieme ordinato, x la variabile indipendente di tale funzione, x_1 e x_2 sono gli estremi dell'intervallo considerato.

Una spiegazione dettagliata della funzione **cylindrical_volume** va al di là degli scopi di queste pagine.

Selezionare **Transfer Save Derive** e, nel campo **file**, digitare **volume** <↵>.

La funzione ora definita viene così salvata e resa disponibile, caricandola come file di Utility, anche per altre sessioni di lavoro.

A questo proposito si tenga presenta che, per poterla utilizzare, è necessario aver già caricato, sempre come file di Utility, **int_apps**.

<u>NOTA BENE</u>

Quando *DERIVE* carica un file di Utility, un file dello stesso tipo eventualmente già presente in memoria <u>non viene cancellato</u>, ma ad esso si aggiungono le nuove funzioni: viene realizzato automaticamente quello che in gergo si chiama *append* dei due file.

Selezionare **Author** e digitare **volumex_of_revolution (√((2-x)/x), x , 3/2, 2)** <↵>.
Selezionare **Simplify**.

Si ottiene il volume trovato nell'esempio 5.6-5 a pag. 337 del Testo di riferimento.

Analogamente si possono utilizzare le seguenti funzioni, che però non sono definite dall'utente né devono essere salvate perché già predefinite nel file **int_apps.mth**:

La funzione **volumey_of_revolution (y, x , x1 ,x2)**, fornisce il volume del solido generato dalla rotazione dello stesso insieme ordinato già visto, intorno all'asse dello ordinate.

La funzione **arc_length (y, x, x1,x2)** fornisce la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = f(x)$, avente per estremi i punti di ascissa, rispettivamente, x_1 e x_2.

Usare le funzioni ora descritte con gli esempi e gli esercizi del paragrafo 5.6 a pag. 332 e segg. del Testo di riferimento.

---

chiamarla in altro modo; si è scelto questo nome per "omogeneità" con gli identificatori delle funzioni predefinite.

[8] Si faccia attenzione che il carattere <_> non è il trattino ma il carattere di "sottolineatura", presente in tutti i tipi di tastiera.

SINTESI
EDITING: Il carattere **θ** (la lettera *theta* dell'alfabeto greco) si ottiene premendo il tasto della lettera <**h**> insieme al tasto <**alt**>.
FUNZIONI: **volumex_of_revolution (y, x , x1 ,x2)** fornisce il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ascisse dell'insieme ordinato individuato dalla funzione **y** nella variabile indipendente **x** e dalle rette di equazioni **x = x1** ed **x = x2**. Tale funzione deve essere definita dall'utente nel seguente modo: **volumex_of_revolution (y, x , x1 ,x2) := cylindrical_volume (r, 0, y, θ, 0, 2π, x, x1, x2)**. **volumey_of_revolution (y, x , x1 ,x2)** fornisce il volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse delle ordinate dell'insieme ordinato individuato dalla funzione **y** nella variabile indipendente **x** e dalle rette di equazioni **x = x1** ed **x = x2**. **arc_length (y, x, x1,x2)** fornisce la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = f(x)$, avente per estremi i punti di ascissa, rispettivamente, **x1** e **x2**. Tutte queste funzioni (ad eccezione della prima, definita dall'utente) sono presenti nel file di Utility **int_apps.mth**.