Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio — SCHEDA N. **27**

ARGOMENTO: Serie.

(LEZIONI n. 33 e 34)

ATTIVITA' N. 1:

Calcolare la somma delle serie

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

a) Basterà osservare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n .$$

Le due serie così ottenute sono serie geometriche di ragione in valore assoluto minore di 1, quindi convergono, rispettivamente, a

$$\frac{1}{1-3/5} = \frac{5}{2} \text{ ed a } \frac{1}{1-4/5} = 5,$$

quindi la serie proposta converge a

$$\frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}.$$

b) In questo caso basterà effettuare una *decomposizione in fratti semplici* del termine a_n. [1]

Si dovrà così esprimere il termine a_n nella forma

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

ove A, B e C sono coefficienti univocamente determinati.

Riducendo allo stesso denominatore si ottiene

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} =$$

(eseguendo i calcoli ed ordinando rispetto alla lettera n)

$$= \frac{n^2(A+B+C) + n(3A+2B+C) + 2A}{n(n+1)(n+2)}.$$

Poiché questa frazione è uguale ad a_n, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

che, dopo facili calcoli, fornisce la soluzione $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$.

[1] V. Appendice 6 a pag. 360 e segg. nel Testo di riferimento.

Si ottiene così

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Prese singolarmente le tre serie ottenute divergono, poiché ciascuna di esse è una *serie armonica* [2] o una serie riconducibile ad essa; tuttavia la serie considerata converge. Infatti si ha:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+....\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ .....\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ .....\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\underline{6}}+\frac{1}{\underline{\underline{8}}}+....\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\underline{3}}+\frac{1}{\underline{\underline{4}}}+....\right)+\left(\frac{1}{\underline{6}}+\frac{1}{\underline{\underline{8}}}+....\right).$$

Gli addendi che si trovano al terzo, secondo e primo posto rispettivamente nella prima, nella seconda e nella terza delle somme indicate tra parentesi, si elidono; così anche gli addendi rispettivamente al quarto, terzo e secondo posto, al k-esimo, $(k-1)$-esimo, $(k-2)$-esimo posto, con $k = 3, 4, 5, ...$

Gli unici termini che non vengono semplificati sono così i primi due addendi della prima somma ed il primo addendo della seconda, cioè

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

La serie proposta converge quindi a 1/4.

ATTIVITA' N. 2:

Nella precedente Scheda (Attività n. 3 e 4) sono state costruite due serie:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}; \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}.$$

Vediamo che si tratta di due serie convergenti e calcoliamo la loro somma.

a) Questa può essere immediatamente ricondotta ad una serie geometrica di primo elemento 1 e ragione $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{(\sqrt{2})^2}+\frac{a}{(\sqrt{2})^3}+ ..... = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+ .....\right).$$

Poiché la ragione è in valore assoluto minore di 1, la serie tra parentesi converge a

$$\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

e quindi la lunghezza richiesta dall'esercizio è:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{a}{\sqrt{2}-1}=\frac{a(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=a(\sqrt{2}+1).$$

[2] V. Esempio 6.2-1 a pag. 377 del Testo di riferimento.

b) Anche in questo caso si tratta di una serie geometrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n}.$$

La ragione è 4/9, quindi la serie è convergente a:

$$\frac{1}{1-4/9} = \frac{9}{5}.$$

Di conseguenza l'area del "poligono limite" cercato sarà:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8\sqrt{3}}{20}.$$

ATTIVITA' N. 3:

Studiare la convergenza delle serie

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.

Sono tutte serie a termini positivi e quindi possono solo essere convergenti oppure divergenti.

a) Basterà osservare che, $\forall\, n > 2$, $n \in N$, è

$$n + 2 < n + n = 2n.$$

Quindi

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n+2}.$$

Possiamo applicare il *criterio del confronto*. [3]

Poiché la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$$

che è la ben nota serie armonica, [4] è divergente, anche la serie proposta diverge.

b) Utilizziamo il *criterio del rapporto*. [5]

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)(n+1)^n}{n^n} =$$
$$= \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Poiché è ben noto [6] che la successione

---

[3] V. Proposizione 6.2-1 a pag. 377 del Testo di riferimento, integrata dal Complemento 6.2-1 a pag. 381.

[4] V. Attività n. 2, es. b) in questa stessa Scheda.

[5] V. Proposizione 6.2-2 a pag. 378 del Testo di riferimento.

[6] V. Esempio 3.7-2 a pag. 220 del Testo di riferimento.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è strettamente crescente (e converge ad e), è

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2 \ \forall n$$

e quindi la serie proposta è divergente.

c) Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, cioè il termine generale della serie non tende a 0, la serie è divergente perché non rispetta la condizione necessaria per la convergenza. [7]

<u>ATTIVITA' N. 4:</u>
Determinare per quali valori di x converge la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{7}{3x-5}\right)^k$$

e calcolarne la somma. [8]

Si tratta di una serie geometrica di primo elemento 1 e ragione $7/(3x-5)$.
Condizione necessaria e sufficiente affinché essa converga è che la ragione sia, in valore assoluto, minore di 1.
Basterà quindi risolvere la disequazione

$$\left|\frac{7}{3x-5}\right| < 1, \quad (1)$$

che equivale al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{7}{3x-5} < 1 \\ \frac{7}{3x-5} > -1 \end{cases}$$

che a sua volta può essere risolto, ad esempio, con le tecniche algebriche già viste nella Scheda n. 8.
In questa sede preferiremo utilizzare un "modello analitico" della disequazione (1).

La funzione $7/(3x-5)$ ha per grafico una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti che sono, rispettivamente, le rette di equazioni $y = 0$ ed $x = 5/3$.
Risolvere la disequazione (1) equivale a determinare le ascisse dei punti dell'iperbole che si trovano all'interno della striscia di piano delimitata dalle rette aventi equazioni $y = 1$ ed $y = -1$ (v. Fig. 1).
Poiché le rette di equazioni $y = 1$ e $y = -1$ intersecano il grafico dell'iperbole nei punti di ascissa, rispettivamente, $x = 4$ ed $x = -2/3$, la serie proposta è convergente per $x > 4$ o per $x < -2/3$ e per tali valori converge a

$$\frac{1}{1-\frac{7}{3x-5}} = \frac{3x-5}{3x-12}.$$

---

7 V. Pag. 376 del Testo di riferimento.
8 V. *G. C. Barozzi, op, cit.*, es. n. 34 a pag. 512.

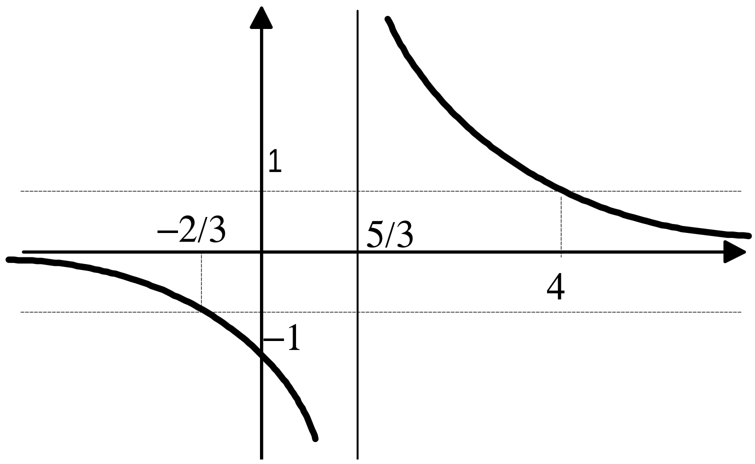

Fig. 1

ATTIVITA' N. 5:

In questa Attività vogliamo calcolare con *DERIVE* la somma delle serie viste nell'Attività n. 1.

a) Selezionare **Author** e digitare **(3^n+4^n)/5^n** <↵>.
Selezionare **Calculus Sum**, premere <↵> per confermare di voler operare con l'espressione evidenziata, premere <↵> per confermare la variabile proposta, **n**, nel campo **Lower limit** digitare **0**, premere **<tab>** per portarsi nel campo **Upper limit** e digitare **+inf**. Premere <↵> per confermare.

Nello schermo di algebra compare il simbolo di serie.

Selezionare **Simplify**.

Dopo un'attesa più o meno lunga (dipende dalla velocità dell'elaboratore a disposizione) durante la quale nella linea di stato vicino alla scritta **Free** diminuisce istante dopo istante il valore che indica la percentuale di memoria libera, compare il messaggio **Memory Full** che indica l'esaurimento delle risorse del sistema.

In questo caso *DERIVE* non è in grado di calcolare direttamente la somma della serie proposta.
Questa può però essere ugualmente calcolata selezionando **Approx** invece di **Simplify**, oppure facendo calcolare da *DERIVE* separatamente le somme delle due serie geometriche come è stato fatto nell'Attività n. 5.

b) Selezionare **Author** e digitare **1/(n(n+1)(n+2))** <↵>.
Selezionare **Calculus Sum** e procedere come indicato nel precedente esercizio.
Selezionare **Simplify**.

Questa volta *DERIVE* fornisce immediatamente il risultato.

Si ricordi comunque [9] , anche se in questa occasione non è necessario, che *DERIVE* è in grado di effettuare la decomposizione in fratti semplici di una funzione razionale fratta digitandola e selezionando **Expand**.

---

9 V. Scheda n. 4, Attività n. 13 e Scheda n 24, Attività n. 3.

Per quanto riguarda poi la risoluzione di un sistema lineare, *DERIVE* lo risolve se lo si presenta sotto forma di "vettore di equazioni". Ad esempio, per risolvere il sistema lineare dell'esercizio b) dell'Attività n. 5, la procedure sono le seguenti.

Selezionare **Author** e digitare **[A + B + C = 0, 3A + 2B + C = 0, 2A = 1]** <↵>; selezionare **soLve**.

Il sistema è determinato. L'unica soluzione viene presentata sotto forma di vettore: **[A = 1/2, B = -1, C = 1/2]**.

Se il sistema lineare è impossibile (esempio banale: **[x + y = 1, x + y = 2]**), *DERIVE* risponde con il messaggio **No solutions found**.

Se infine il sistema lineare è indeterminato (esempio banale: **[x + y = 1, 2x + 2y = 2]**), *DERIVE* risponde esprimendo una o più variabili (a seconda dei casi) con il simbolo di indeterminazione **@1**. [10]

SINTESI
MENU Il comando **soLve** applicato ad un vettore di *n* equazioni lineari in *n* incognite fornisce la soluzione del sistema sotto forma di vettore di dimensione *n*. Se il sistema è impossibile, compare sulla linea di stato il messaggio **"No solutions found"**. Se il sistema è indeterminato, la incognite vengono calcolate in funzione di una variabile arbitraria denominata, di volta in volta, **@1**, **@2**, ... **@n**, in sequenza.

[10] V. Scheda n. 15, Attività n. 7.