Consorzio Nettuno - Corso di Matematica 1
Schede di lavoro guidato per le esercitazioni

A cura di Sebastiano Cappuccio SCHEDA N. **28**

ARGOMENTO: Approssimazione locale di una funzione mediante funzioni polinomiali. Polinomi di Taylor. Polinomi interpolatori di Lagrange.

________________________(LEZIONI n. 35 e 36)________________________

ATTIVITA' N. 1:

Scrivere i polinomi di Taylor di secondo grado per la funzione $f(x) := \cosh x$ di punto iniziale $x_0 = 0$. [1]

Applicheremo la nota formula [2]

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{D}^k f)(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Poiché

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

avremo

$f(0) = 1$; $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, quindi $f'(0) = 0$; $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, quindi $f'(0) = 1$

e il polinomio di Taylor cercato è

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 .$$

ATTIVITA' N. 2:

Selezionare **Author** e digitare **cosh x** <↵>.

Selezionare **Calculus Taylor**.

Premere <↵> per confermare di voler operare con l'espressione ora digitata.

Premere <↵> per confermare la variabile x proposta.

Digitare **2** nel campo **Degree** (grado) e premere <↵> per confermare, lasciando invariato il valore **0** proposto nel campo **Point** (punto, relativamente al quale si desidera il polinomio di Taylor).

Selezionare **Simplify**.

Compare il polinomio di Taylor desiderato, che è lo stesso calcolato manualmente nella precedente Attività.

Posizionare il cursore sulla funzione digitata e selezionare **Plot Plot**, poi, senza aspettare che il grafico sia completamente tracciato, selezionare **Algebra**, evidenziare con i tasti cursore il polinomio di Taylor ottenuto e selezionare ancora **Plot Plot**.

Appaiono i grafici della funzione **cosh x** e del polinomio di Taylor ottenuto.

Si noti che, in un intorno del punto $x = 0$, i grafici della funzione coseno iperbolico e della *parabola osculatrice* ottenuta appaiono praticamente coincidenti. I grafici delle

---

1 V. *G. C. Barozzi*, *op. cit.*, es. n. 20 pag. 513.

2 V. Proposizione 7.3-1, pag. 401 e segg. del Testo di riferimento.

due funzioni hanno nel punto $x = 0$ un contatto del secondo ordine cioè in quel punto le due funzioni hanno uguali sia la derivata prima che la derivata seconda.

ATTIVITA' N. 3:

Selezionare **Delete Last**.

Il grafico dell'ultima funzione tracciata (quello del polinomio di Taylor) viene cancellato dallo schermo di grafica.

Selezionare **Algebra** per tornare all'ambiente di calcolo.

Evidenziare con i tasti cursore la funzione **cosh x** prima digitata.

Calcolare il polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $x = 1$.

Si usi il menu come si è visto nella precedente Attività; dopo aver indicato il grado, invece di premere <↵>, si prema il tasto di tabulazione **<tab>** per passare al campo **Point** e si digiti il valore desiderato, **1**.

Selezionare **Simplify**.

Appare il polinomio desiderato. Si ricordi che il simbolo **ê** rappresenta in *DERIVE* il ben noto numero di Eulero.

Selezionare **Plot** per tornare all'ambiente di grafica e ancora **Plot** per tracciare il grafico della nuova parabola.

Appare una situazione simile a quella già vista in precedenza, però questa volta riferita al punto di ascissa 1.

Selezionare **Delete All** per cancellare lo schermo di grafica e si prema il tasto funzione **<F9>** per portare la scala ai valori **x:0.5**, **y:0.5**, poi selezionare **Algebra** per tornare all'ambiente di calcolo.

Selezionare **Author** e digitare **f(x) := sinx** <↵>.

Selezionare **Author** e digitare **vector (taylor (f(x),x,k,0), k, 1, 10)** <↵>.

Selezionare **Simplify**.

Appaiono, sotto forma di elementi di un vettore, i polinomi di Taylor della funzione proposta, dal grado 1 al grado 10, calcolati nel punto $x = 0$.

Dato che la lunghezza del vettore supera quella di una linea di schermo, usando i tasti di movimento del cursore verso destra o verso sinistra si possono esaminare i suoi elementi che scorreranno orizzontalmente sullo schermo.

Perché ciascun polinomio appare ripetuto due volte?

Tracciare il grafico delle funzione **sin x** e del vettore ora ottenuto.

Con la scala prescelta vengono visualizzati i punti di ascissa compresa, grosso modo, tra -2 e 2. E' difficile riconoscere in queste condizioni quale dei grafici tracciati corrisponda alla funzione sin x e quali ai polinomi di Taylor.

Premere due volte il tasto funzione **<F10>**.

Abbiamo così ottenuto un "allargamento della visuale" rappresentando i punti di ascissa compresa tra -8 e 8 (circa). Ora è molto facile distinguere tra il grafico della funzione sin x e quelli dei polinomi di Taylor.

Detto in parole povere, in un intorno del punto $x = 0$, l'errore che si commette considerando un polinomio di Taylor invece della funzione data è molto "piccolo" (e tanto più "piccolo" quanto più elevato è il grado del polinomio).

Ripetere le precedenti azioni (cancellazione dello schermo di grafica, definizione della funzione, calcolo dei polinomi di Taylor fino al decimo grado e tracciamento dei grafici) per le seguenti funzioni relativamente ai punti a fianco indicati:

a) $f(x) := \sin x$, $x_0 = \pi/2$;
b) $f(x) := \ln(x + 1)$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) := e^x$, $x_0 = -1$;
d) $f(x) := \ln x$, $x_0 = 0$;

ATTIVITA' N. 4:

Dopo aver cancellato lo schermo di grafica e predisposto la scala ad **x:5**, **y:5**, passare all'ambiente di Algebra, selezionare **Author** e digitare **vector(abs (sinx - taylor (sin x, x, 0, k)), k, 1, 10)** <↵>, selezionare **Simplify** e tracciare il grafico dell'insieme di funzioni così ottenuto.

Si ottiene così una valutazione qualitativa dell'errore che si commette considerando un polinomio di Taylor invece della funzione data.

Si noti che l'intervallo in cui l'errore è minore di una data quantità diventa sempre più ampio man mano che si considerano polinomi di Taylor di grado sempre più elevato.

ATTIVITA' N. 5:

In questa Attività costruiremo con *DERIVE* un polinomio che interpola con il metodo di Lagrange un insieme di punti dati. Questo metodo è descritto sul Testo di riferimento nel Capitolo 2, da pag. 115.

Nell'Attività n. 9 vedremo un altro modo, più rapido, per costruire un polinomio interpolatore utilizzando una funzione predefinita di *DERIVE*; tuttavia ora si preferisce costruire una funzione definita dall'utente come esempio di "programma" in *DERIVE* che ricostruisce le operazioni che conducono al risultato desiderato, anche allo scopo di esplorare alcune importanti funzioni di *DERIVE*.

Per semplicità, le coordinate dei punti saranno poste in una matrice $n \times 2$, ove n è il numero dei punti; la prima colonna della matrice sarà quella delle ascisse e la seconda colonna sarà quella delle corrispondenti ordinate [3]. Indicheremo con **m** questa matrice.

lagrange

Selezionare **Author** e digitare **s:=dimension(m)** <↵>.

La funzione **dimension(m)** [4] calcola la dimensione di un vettore. Poiché una matrice viene vista da *DERIVE* come un vettore di vettori (riga), questo ci permette di calcolare il numero dei punti le cui coordinate costituiscono la matrice **m**; la matrice sarà da noi definita in un secondo tempo.

Selezionare **Author** e digitare **a(i):= element(m,i,1)** <↵> poi ancora **Author** e **b(i):= element(m,i,2)** <↵>.

Con queste due istruzioni **a(i)** e **b(i)** saranno rispettivamente l'ascissa e l'ordinata dello i-esimo punto dato. La funzione **element(m,p,q)** fornisce l'elemento della matrice **m** posta nella p-esima riga e nella q-esima colonna.

Verranno ora calcolati i polinomi di Lagrange. Per semplicità costruiremo separatamente il numeratore ed il denominatore.

Si ricordi che [5]

---

[3] I punti possono anche avere la stessa ordinata, ma le loro ascisse devono essere tutte distinte tra loro.

[4] V. anche Scheda n. 15.

[5] Per motivi di "compatibilità" con *DERIVE*, in questa sede i punti sono n, numerati da 1 ad n; il polinomio interpolatore avrà quindi grado n–1.

$$L_k(x) := \frac{(x-x_1)(x-x_2)\,.....\,(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\,....\,(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\,.....\,(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\,....\,(x_k-x_n)}.$$

Questo polinomio ha la caratteristica di assumere valore 1 assegnando ad *x* l'ascissa del *k*-esimo punto, di assumere valore 0 assegnando ad *x* l'ascissa x_i di qualunque altro punto (con $i \neq k$)

Selezionare **Author**. Digitare **n(k) := product(x - a(i), i, 1, k - 1) product(x - a(i), i, k + 1, s)** <↵>.

La funzione **product(a,b,c,d)** calcola il prodotto dei termini **a** con **b** che varia da **c** a **d**. Corrisponde al simbolo (che appare anche sullo schermo di Algebra di *DERIVE*):

$$\prod_{b=c}^{d} a.$$

Selezionare **Author**. Digitare **d(k) := product(a(k) - a(i), i, 1, k-1) product(a(k) - a(i), i, k + 1, s)** <↵>.

Per facilitare la digitazione, dato che l'espressione è molto simile alla precedente, si consiglia di utilizzare la tecnica del richiamo nella linea di editing dell'espressione precedente con il tasto funzione **<F3>** descritta nell'Attività n. 10 della Scheda n. 0.

Selezionare **Author** e digitare **l(k):=n(k)/d(k)** <↵> per definire il *k*-esimo polinomio di Lagrange.

Selezionare **Option Input** e, nel campo **Mode**, selezionare **Word**. Premere <↵> per confermare. [6]

Si ricordi che per passare da una scelta ad un'altra tra quelle offerte in un campo, si preme la barra spazio.

Da questo momento *DERIVE*, durante questa sessione di lavoro, assume che un identificatore (di variabile o di funzione) possa essere formato anche da più caratteri.

Selezionare **Author** e digitare **interp(m) := sum(b(k) l(k), k, 1, s)** <↵>.

Viene così definito il polinomio che interpola i punti le cui coordinate costituiscono la matrice **m**.

Si noti che il polinomio

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\, L_k(x),$$

per come sono stati definiti i polinomi di Lagrange $L_k(x)$, ha grado $n-1$ e, in corrispondenza di x_i, assume il valore corrispondente y_i, con $i = 1, 2, ...n$.

Selezionare **Transfer Save Derive** e, nel campo file, digitare **lagrange.mth**. Premere <↵> per confermare.

Il "programma" che abbiamo appena scritto sarà salvato in un file, che reca l'estensione .MTH; in un'altra sessione di lavoro potrà essere richiamato con il comando **Transfer Load** e riutilizzato.

ATTIVITA' N. 6:

Selezionare **Declare Matrix**. Nel campo **Rows** scrivere 4, nel campo **Columns** scrivere **2**; premere <↵> per confermare.

Uno alla volta vengono richiesti gli elementi della matrice, riga dopo riga, premendo ogni volta <↵>.

Inserire i valori delle coordinate dei seguenti punti: (–1; –1), (0; –1/3), (1; 0), (2; 1).

---

[6] V. anche Scheda n. 13, Attività n. 5.

Selezionare **Author** e digitare **m:=**, poi premere **<F3>** per richiamare la matrice nella linea di editing. Premere <↵> per confermare. La matrice contenente le coordinate dei punti verrà d'ora in poi identificata dalla lettera **m**.
Selezionare **Author** e digitare **interp(m)** <↵>.
Selezionare **Simplify**.

Appare il polinomio

$$\frac{1}{6}\left(x^3 - x^2 + 2x - 2\right)$$

che interpola i dati forniti.

Selezionare **Plot** per accedere all'ambiente di grafica, poi selezionare **Options State**.
Nel campo **Coordinates** selezionare **Rectangular**, nel campo **Mode** selezionare **Discrete**, nel campo **Size** selezionare **Large**.

Si ricordi che si passa da un campo all'altro premendo **<tab>**, che si seleziona tra due o più scelte evidenziando quella desiderata con **<spazio>**; la scelta selezionata appare chiusa tra parentesi. Premendo <↵> si confermano tutte le scelte effettuate.

Come si è visto nella Scheda n. 9, questi comandi predispongono la grafica di *DERIVE* a funzionare, durante tutta questa sessione di lavoro, in coordinate cartesiane; i punti saranno disegnati non collegati tra loro da segmenti (**Discrete**) e, per meglio evidenziarli, saranno disegnati sullo schermo da un quadratino di nove pixel (**Large**).

Selezionare ancora **Plot** per rappresentare nel piano i punti le cui coordinate costituiscono la matrice evidenziata.
Selezionare **Algebra** per tornare all'ambiente di Algebra. Evidenziare il polinomio interpolatore e selezionare **Plot** e ancora **Plot**.

Appare il grafico del polinomio che interpola i punti dati. Si noti che, come previsto, il grafico passa per tutti i punti dati.

ATTIVITA' N. 7:

Calcolare il valore che il polinomio interpolatore trovato assume assegnando ad *x* nell'ordine i seguenti valori: 1.5, 1.8, 2.5.

Sarà sufficiente selezionare **Author**, digitare **x :=** e poi il valore desiderato, premere <↵>, poi evidenziare il polinomio e selezionare **Simplify**.

Per i primi due punti, con ascissa compresa nell'intervallo [–1, 2], si tratta di una vera e propria *interpolazione*, per l'altro di una *estrapolazione*, cioè della determinazione del valore corrispondente ad un'ascissa esterna all'intervallo $[x_1, x_n]$ ove x_i rappresentano le ascisse dei punti dati che si suppongono fornite in ordine crescente.

Selezionare **Author** e digitare **x := x** <↵> per "liberare" la variabile x dai valori numerici assegnati.

ATTIVITA' N. 8:

Seguendo le indicazioni dell'Attività n. 6, definire e tracciare, insieme al rispettivo polinomio interpolatore, i seguenti insiemi di punti: [7]

$A_1(-2; 1.3)$, $A_2(-1.8; 1)$, $A_3(-1; 1)$, $A_4(0; 1)$, $A_5(1; 1)$, $A_6(2; 1.5)$.
$B_1(-2; 0.7)$, $B_2(-1.8; 1)$, $B_3(-1; 1)$, $B_4(0; 1)$, $B_5(1; 1)$, $B_6(2; 1.5)$.

[7] V. *G. C. Barozzi, "Primo Corso di Analisi Matematica* - ed. Zanichelli, pag. 117.

Si noti che le coordinate dei punti dei due insiemi sono le stesse tranne quelle del primo punto, di cui le ordinate differiscono di "poco".

Si consiglia, una volta definita la prima matrice, di ottenere la seconda da essa modificandola con l'ormai consueta tecnica del tasto **<F3>**.

E' importante osservare che i grafici dei due polinomi interpolatori sono assai differenti tra loro: si tratta di una classica situazione "instabile", nella quale cioè una piccola "perturbazione" dei dati può portare a risultati molto diversi, soprattutto se si pretende di utilizzare i dati per una estrapolazione anziché per una interpolazione.

ATTIVITA' N. 9:

Vediamo ora un metodo più rapido per ottenere il polinomio di grado $n - 1$ che interpola n punti dati.

Questo metodo si basa sull'uso della funzione **fit**. [8]

Selezionare **Transfer Clear** per azzerare l'ambiente di lavoro.

Costruire la matrice 4×2 con il comando **Declare Matrix**, come indicato nell'Attività n. 2, utilizzando gli stessi valori.

Selezionare **Author** e premere il tasto funzione **<F3>** per portare nella linea di editing la matrice ora definita.

Premere **<ctrl> + <s>** per posizionare il cursore dopo la prima parentesi quadra.

Premere il tasto **<ins>** per passare alla modalità di inserimento. [9]

Nella linea di stato, (la linea più bassa dello schermo) compare la scritta **insert**.

Ciò che ora sarà digitato, invece di sovrapporsi ai caratteri che seguono il cursore nella linea di editing, li "spingeranno" verso destra aggiungendosi ad essi a partire dalla posizione del cursore.

Digitare **[x, ax^3+bx^2+cx+d],** <↵>.

Viene così aggiunta una nuova riga alla matrice, recante le indicazioni sul tipo di equazione che si vuole ottenere.

Si faccia attenzione a digitare anche la virgola dopo aver chiuso la parentesi quadra: ciò farà sì che il vettore ora digitato sia considerato come una nuova riga della matrice.

Poiché i punti sono 4, la funzione polinomiale che li interpola dovrà essere di terzo grado.

Selezionare **Author**, digitare **fit**, poi premere **<F3>** per portare nella linea di editing la precedente matrice che costituirà così l'argomento della funzione **fit**.

Premere <↵> e selezionare **Simplify**.

Si ottiene il polinomio di terzo grado che interpola i punti dati.

Confrontare il risultato con quello ottenuto nell'Attività n. 6.

---

8 V. Attività 4 e 10 della Scheda n. 15 ed Attività n. 6 della Scheda n. 25.

9 V. Attività n. 10, Scheda n. 0.

SINTESI

FUNZIONI

Dimension(v) fornisce il numero degli elementi del vettore **v**. Poiché una matrice è vista da *DERIVE* come un vettore di vettori riga, se **v** è una matrice, viene fornito il numero delle sue righe.

Taylor (f(x), x, a, n) fornisce il polinomio di Taylor di grado **n** per la **funzione f(x)** di variabile indipendente **x**, di punto iniziale **a**.

MENU

Per calcolare il polinomio di Taylor di una funzione presente sullo schermo di Algebra: evidenziare la funzione (se necessario usando i tasti di movimento del cursore), selezionare **Calculus Taylor**, premere <↵> per confermare di voler operare con la funzione evidenziata; nel campo **variable** digitare, se non è già indicato da *DERIVE*, la variabile indipendente della funzione e premere <↵>; nel campo **Degree** indicare il grado del polinomio desiderato, premere **<tab>** per passare al campo **Point** e digitare il valore desiderato. Premere <↵> per confermare, poi selezionare **Simplify**.