7. Integrazione delle funzioni di più variabili (II)

`http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/SCAM/SCAM-tr.07B.pdf`

7.5 Area del parallelogramma costruito su due vettori. Volume del parallelepipedo costruito su tre vettori

Consideriamo i vettori $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2)$ e $\boldsymbol{b} := (b_1, b_2)$ di $\mathbb{R}^2$; supponiamo che la terna $(0,0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) sia orientata positivamente, cioè nello stesso verso della terna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Per l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) possiamo sommare l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(b_1, 0)$, (b_1, b_2), quella del trapezio rettangolo di vertici $(b_1, 0)$, $(a_1, 0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) e sottrarre l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(a_1, 0)$, (a_1, a_2):

$$\begin{aligned}\text{area}(OAB) &= \frac{1}{2}\big(b_1 b_2 + (a_1 - b_1)(a_2 + b_2) - a_1 a_2\big) = \frac{1}{2}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

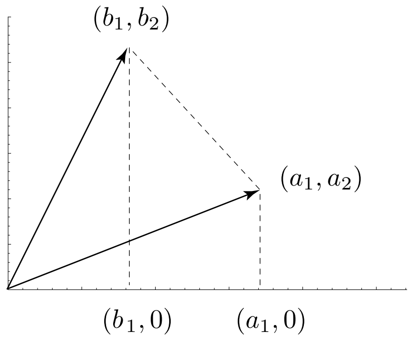

Figura 7.6. L'area del parallelogramma costruito su due vettori è esprimibile sotto forma di determinante.

Dunque l'ultimo determinante scritto rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Si osservi che è del tutto indifferente scrivere i vettori $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{b}_2$ come righe oppure come colonne del determinante considerato.

Nelle ipotesi ammesse il determinante è un numero positivo; in ogni caso il segno del determinante è positivo se la terna $(0,0)$, (a_1, a_2), (b_1, b_2) è orientata positivamente, negativo in caso contrario.

Analogamente, dati i tre vettori $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} := (b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c} := (c_1, c_2, c_3)$ di $\mathbb{R}^3$, il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

fornisce (a meno del segno) il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Il segno è positivo se la terna dei vettori è orientata coma la terna dei versori degli assi $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, negativo in caso contrario.

7.6. Cambiamento di variabili in un integrale doppio o triplo

Sappiamo che per le funzioni di una variabile si ha la formula di cambiamento di variabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

La derivata $x'(t)$ può essere interpretata come il fattore di proporzionalità tra una "piccola variazione" della nuova variabile t e la corrispondente variazione della variabile originaria x. Diciamo che essa rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra le lunghezze nel passaggio dalla variabile t alla x.

Analogamente, supponiamo di effettuare un cambiamento di variabili del tipo

$$x = x(u, v), \quad y = v(u, v);$$

poiché i differenziali di x e y si scrivono

$$dx = x_u(u, v)\, du + x_v(u, v)\, dv, \quad dy = y_u(u, v)\, du + y_v(u, v)\, dv,$$

all'incremento vettoriale $(du, 0)$ corrisponde (trascurando infinitesimi di ordine superiore agli incrementi stessi) l'incremento

$$(x_u(u, v)\, du,\ y_u(u, v)\, du),$$

mentre all'incremento $(0, dv)$ corrisponde l'incremento

$$(x_v(u, v)\, dv,\ y_v(u, v)\, dv).$$

Il parallelogramma (nel piano xy) costruito sui due vettori appena considerati ha come area

$$\begin{vmatrix} x_u\, du & x_v\, dv \\ y_u\, du & y_v\, dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du\, dv.$$

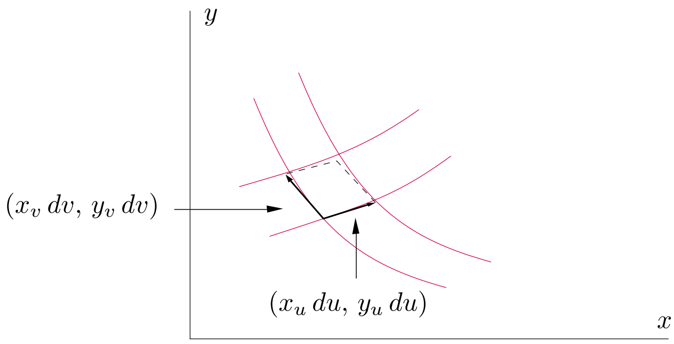

Figura 7.7. L'elemento di area nel piano (x, y) è uguale al prodotto dello jacobiano $\det\big(\partial(x, y)/\partial(u, v)\big)$ per $du\, dv$.

Dunque il determinante

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

rappresenta il coefficiente di proporzionalità tra l'area di un parallelogramma (di fatto un rettangolo) nel piano uv e l'area del corrispondente parallelogramma nel piano xy.

La matrice

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

è nota come matrice *jacobiana* delle variabili x, y rispetto alla variabili u, v, dal nome del matematico tedesco C.G.J. Jacobi (1804-1851).

In pratica si considerano combiamenti di variabili a cui corrispondono matrici jacobiane con determinante positivo; ciò non è restrittivo, perché, in caso contrario, basterebbe cambiare u in $-u$ (oppure v in $-v$) per ottenere il risultato desiderato.

Se abbiamo un dominio D nel piano xy, ed esso è rappresentato nel piano uv da un opportuno dominio D_{uv}, allora avremo

$$\operatorname{area}(D) = \iint_D dx\, dy = \iint_{D_{uv}} \det\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right) du\, dv. \tag{7.6.1}$$

Analogamente, se $f(x, y)$ è una funzione definita su un insieme contenente D, avremo

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du\,dv. \tag{7.6.2}$$

Esempio 7.6.1. COORDINATE POLARI NEL PIANO

Consideriamo nel piano un sistema di coordinate polari ρ e φ; esse sono legate alle coordinate cartesiane x e y dalle formule

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{7.6.3}$$

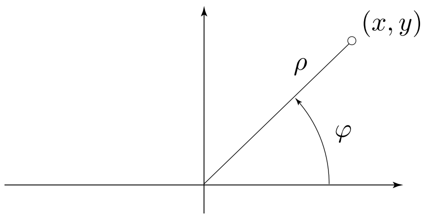

Figura 7.8. Le coordinate polari ρ e φ del punto (x, y).

Si ha $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, e per ogni $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{y}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\[2ex] \cot\varphi = \dfrac{x}{y}, & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Ne deduciamo

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + c, \quad \text{oppure} \quad \varphi = \operatorname{arccot}\frac{x}{y} + c,$$

dove la costante c va scelta in base al quadrante di appartenenza del punto (x, y). Ad esempio, nel caso dell'arcotangente, $c = 0$ nel primo e quarto quadrante, $c = \pi$ nel secondo quadrante e $c = -\pi$ nel terzo quadrante. Le *curve coordinate*, cioè le curve individuate dalle relazioni $\rho =$ costante e $\varphi =$ costante sono le circonferenze di centro l'origine e le semirette uscenti dall'origine: tali curve si tagliano mutuamente ad angolo retto, e pertanto si tratta di un sistema di coordinate *ortogonali*.

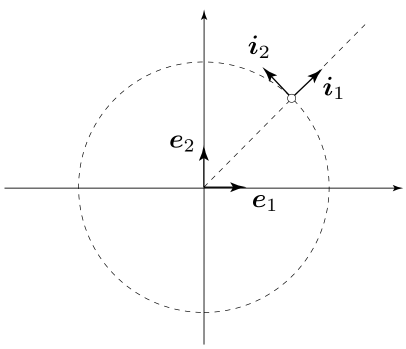

Figura 7.9. Le curve $\rho =$ costante e $\varphi =$ costante si tagliano ortogonalmente.

Per il determinante jacobiano abbiamo

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

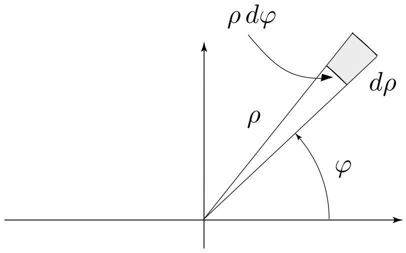

Figura 7.10. L'*elemento di area* in coordinate polari si scrive $\rho\, d\rho\, d\varphi$.

A titolo di esercizio, calcoliamo nuovamente l'area del semicerchio di raggio r ed il suo baricentro. Abbiamo per l'area

$$\int_0^r \int_0^\pi \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r = \pi \frac{r^2}{2};$$

per ottenere l'ordinata del baricentro dobbiamo calcolare

$$\int_0^r \int_0^\pi \rho \sin\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^r \int_0^\pi \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = \int_0^r \rho^2\, d\rho \cdot \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = \frac{r^3}{3} \cdot 2,$$

da cui infine per l'ordinata stessa il valore

$$\overline{y} = \frac{4}{3\pi}\, r \approx 0.424\, r.$$

Esempio 7.6.2. Coordinate cilindriche nello spazio
Le coordinate cilindriche nello spazio si ottengono semplicemente aggiungendo una quota z alle coordinate polari:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z. \tag{7.6.4}$$

Avremo dunque lo jacobiano

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

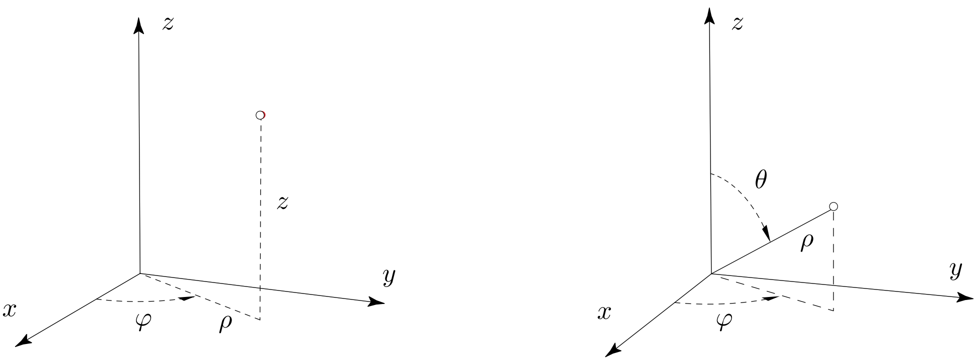

Figura 7.11. Coordinate cilindriche (a sinistra) e coordinate sferiche (a destra).

Esempio 7.6.3. Coordinate sferiche nello spazio
Le coordinate sferiche sono date dalle formule

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{7.6.5}$$

Gli angoli φ e θ sono la *longitudine* e la *colatitudine*. possiamo suppore che sia $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, oppure,$\varphi \in (-\pi,\pi]$.

I due sistemi di coordinate appena descritti sono del tipo

$$x = x_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = x_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = x_3(q_1, q_2, q_3). \tag{7.6.6}$$

Supponiamo che ogni punto dello spazio (tranne al più i punti di un insieme di misura nulla) sia individuato da un'unica terna di coordinate q_1, q_2, q_3, in modo che sia possibile risolvere il sistema (7.6.5) nella forma

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z). \tag{7.6.7}$$

Per ogni punto dello spazio passano tre superfici descritte da equazioni del tipo $q_1 =$ costante, $q_2 =$ costante, $q_3 =$ costante, dette *superfici coordinate*; tali superfici si tagliano a due a due secondo *curve coordinate*. Questo spiega il nome di *coordinate curvilinee* che viene dato alle coordinate q_1, q_2, q_3.

Si ottengono risultati più semplici se tali coordinate sono *ortogonali*, cioè tali che le tre curve coordinate che passano per ciascun punto siano mutuamente ortogonali; ciò significa che le tangenti alle curve stesse in tale punto formano angoli retti. È il caso delle coordinate cilindriche e sferiche. Nel primo caso abbiamo

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z;$$

le superfici coordinate sono:

$\rho =$ costante: cilindri circolari retti con asse di rotazione l'asse z,

$\varphi =$ costante: piani passanti per l'asse z,

$z =$ costante: piani ortogonali all'asse z.

Nel caso delle coordinate sferiche abbiamo

$q_1 = \rho, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi;$

le superfici coordinate sono:

$\rho =$ costante: sfere di centro l'origine,

$\theta =$ costante: coni circolari retti di vertice l'origine e asse di rotazione l'asse z,

$\varphi =$ costante: piani passanti per l'asse z.

Calcoliamo lo jacobiano in coordinate sferiche. Si ha, sviluppando secondo gli elementi della terza colonna,

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi & \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi & -\rho\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi & \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi & \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\,\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho\,\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi & \rho\,\cos\theta\,\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi & \rho\,\cos\theta\,\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\,\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \rho\,\sin\theta\big[\sin\varphi\,(\rho\,\sin^2\theta\,\sin\varphi + \rho\,\cos^2\theta\,\sin\varphi) + \cos\varphi(\rho\,\sin^2\theta\,\cos\varphi + \rho\,\cos^2\theta\,\cos\varphi)\big] =$$
$$= \rho\,\sin\theta\big[\rho\,\sin^2\varphi + \rho\,\cos^2\varphi\big] =$$
$$= \rho^2\,\sin\theta.$$

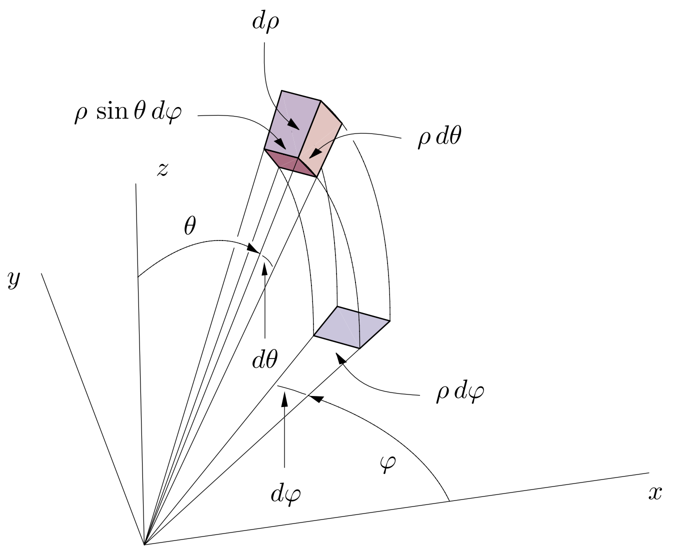

Figura 7.12. L'*elemento di volume* in coordinate sferiche si scrive $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

A titolo di esercizio, ricalcoliamo il volume della semisfera di raggio r e la quota del relativo baricentro. Abbiamo

$$\int_0^r \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho^2\,\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_0^r \rho^2\,d\rho \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{r^3}{3}\cdot 1\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\,\pi\,r^3.$$

Si deve poi calcolare

$$\int_0^r \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho\,\cos\theta\,\rho^2\,\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{1}{4}\,\pi\,r^4,$$

da cui infine si ha la quota del baricentro:

$$\overline{z} = \frac{3}{8}\,r.$$