

CURRICULUM VITAE DI ANDREA BONFIGLIOLI

Contenuti:

- VITA E STUDI pag. 2
- PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE pag. 4
- DESCRIZIONE GENERALE DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA pag. 8
- ATTIVITÀ DIDATTICA pag. 11
- PARTECIPAZIONE A PROGETTI DI RICERCA E CONVEGNI pag. 15
- BREVE DESCRIZIONE DELLE SINGOLE PUBBLICAZIONI pag. 17
- ALLEGATI pag. 24

Vita e studi:

- Sono nato a Bologna il 17/05/1974 e risiedo a Zola Predosa (Bologna). Mi sono diplomato presso il Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci” di Casalecchio di Reno (Bologna) nell’Anno Scolastico 1992-93 con voto finale di 60 su 60.
- Ho conseguito la Laurea in Matematica, indirizzo Generale, presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell’Università di Bologna, il 17/07/1998, con votazione finale 110/110 e Lode, discutendo una tesi dal titolo “*Alcune Equazioni di tipo Curvatura di Levi*” (relatore prof. E. Lanconelli).
- Ho prestato servizio civile nel periodo 15-11-1999/14-09-2000, presso l’Università di Bologna (Segreteria Didattica e Scientifica del Dipartimento di Matematica).
- Nell’A.A. 1998-99 sono risultato vincitore del concorso per l’ammissione al XIV ciclo del Dottorato di Ricerca in Matematica, presso l’Università di Bologna.
- Nell’ottobre 2000 ho conseguito l’Abilitazione all’Insegnamento per la Classe di Concorso A047 – Matematica nelle Scuole Secondarie della Regione Emilia-Romagna, essendomi classificato ai primi posti della graduatoria per il Concorso Ordinario a Cattedre per Titoli ed Esami (2000).
- Nel periodo marzo 2003 - maggio 2003 ho seguito il Corso di Formazione per Docenti Neo-Assunti (40 ore), obbligo istituzionale per la titolarità della cattedra in Matematica di cui sopra.
- Ho conseguito il titolo di Dottore di Ricerca in Matematica presso l’Università di Bologna il 29/04/2003 (XIV ciclo), discutendo una tesi dal titolo “*Operatori Differenziali del Secondo Ordine sui Gruppi di Lie Stratificati*” (relatore prof. E. Lanconelli).
- Dal 1/11/2002 al 31/10/2006 sono stato Assegnista di Ricerca in Matematica presso l’Università di Bologna nell’ambito di un progetto di ricerca dal titolo “*Equazioni sub-Ellittiche sui Gruppi di Lie Omogenei*” (referente prof. E. Lanconelli).
- Dal 01/09/2000 al 31/10/2006 sono stato docente in ruolo (giuridico) per la cattedra di Matematica presso l’Istituto Superiore I.P.S.S.A.R. di Castel S. Pietro Terme (Bologna). In tale periodo, sono stato in congedo da tale docenza per motivi di studio (Dottorato ed Assegno di Ricerca).
- Dal 01/11/2006 sono Ricercatore in Matematica presso la Facoltà di Scienze MM. FF. NN. dell’Università di Bologna nel settore disciplinare MAT/05 Analisi Matematica. Dal 01/11/2009 sono Ricercatore Confermato (SSD: MAT/05; Settore Concorsuale: 01/A3).

Altre informazioni relative al percorso scientifico e professionale:

- Nell’A.A. 1999/2000 ho collaborato all’organizzazione dell’evento “Matematica Arte e Tecnologia - da Escher alla Computer Graphics”, organizzato dal Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna, in occasione del “World Mathematical Year 2000”. Ho collaborato all’allestimento della relativa mostra (Bologna, 12 ottobre-31 dicembre 2000), curandone altresì il catalogo.
- Da settembre 2010 a maggio 2012 ho collaborato con la Casa Editrice Zanichelli di Bologna come editor e revisore nel Progetto MATutor (per la realizzazione di materiale editoriale e strumenti multimediali per lo studio della Matematica nella Scuola Secondaria Superiore), e sono tra i revisori e tra i realizzatori di testi ed esercizi per il libro MATutor per la quinta Liceo Scientifico [M. Bergamini, G. Barozzi, Zanichelli, Bologna (2012)].

- Per l'A.A. 2012/2013 partecipo al Piano nazionale Lauree Scientifiche (PLS) del M.I.U.R. (per l'orientamento e la formazione degli insegnanti), classe di Matematica, presso il Dipartimento di Matematica di Bologna e sono responsabile di un laboratorio attivato per l'A.A. 2012/13.
- Per l'A.A. 2012/2013 sono membro della Commissione Didattica del Dipartimento di Matematica di Bologna. A partire dall'A.A. 2010/2011 sono membro della "Commissione per l'Orientamento" del Dipartimento di Matematica di Bologna. A partire dall'A.A. 2011/2012 sono responsabile delle Giornate dell'Orientamento per i CdS Triennale e Magistrale in Matematica di Bologna. Faccio parte del gruppo di lavoro che gestisce lo "Orientamento in Itinere" per gli studenti del CdS Triennale in Matematica.
- Per dodici Anni Accademici (a partire dal 1999/2000) ho svolto una collaborazione con C.E.U.R. (Centro Europeo Università e Ricerca) per il Tutorato in Analisi Matematica presso la Residenza Universitaria di Eccellenza "Alma Mater" di Bologna.
- Da giugno 2008 a settembre 2010 ho svolto un'attività di sostegno presso l'Istituto per non vedenti F. Cavazza di Bologna, per la didattica speciale della Matematica in presenza di diversa-abilità visiva.
- Ho pubblicato con Springer-Verlag due monografie (XXVI+800 pagine; XLV+539 pagine) nelle collane *Springer Monographs in Mathematics* e *Lecture Notes in Mathematics*: si vedano i riferimenti [20] e [27] nell'elenco delle pubblicazioni.
- Sono stato Referee (anonimo) per le riviste *Applicable Analysis*; *Computer Physics Communications*; *SCIENCE CHINA Mathematics*.

Publicazioni Scientifiche su Rivista

1. *Liouville-type theorems for real sub-Laplacians* (con E. Lanconelli) **Manuscripta Math.** 105, 111–124 (2001).
2. *Expansion of the Heisenberg integral mean via iterated Kohn Laplacians: a Pizzetti-type formula*, **Pot. Analysis** 17, 165–180 (2002).
3. *Maximum Principle on unbounded domains for sub-Laplacians: a Potential Theory approach* (con E. Lanconelli), **Proc. Amer. Math. Soc.** 130, 2295–2304 (2002).
4. *Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Adv. Differential Equations** 7, 1153–1192 (2002).
5. *Subharmonic functions on Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Math. Ann.** 325, 97–122 (2003).
6. *Levi's parametrix for some sub-elliptic non-divergence form operators* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Electron. Res. Announc. Math. Sci.** 9, 10–18 (2003).
7. *Some non-existence results for critical equations on step-two stratified groups* (con F. Uguzzoni), **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.** 336, 817–822 (2003).
8. *Nonlinear Liouville theorems for some critical problems on H-type groups* (con F. Uguzzoni), **J. Funct. Anal.** 207, 161–215 (2004).
9. *Homogeneous Carnot groups related to sets of vector fields*, **Bollettino U.M.I.** (8) 7-B, 79–107 (2004).
10. *Families of diffeomorphic sub-Laplacians and free Carnot groups* (con F. Uguzzoni), **Forum Math.** 16, 403–415 (2004).
11. *Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups* (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Trans. Amer. Math. Soc.** 356, 2709–2737 (2004).
12. *A note on lifting of Carnot groups* (con F. Uguzzoni), **Rev. Mat. Iberoamericana** 21, 1013–1035 (2005).
13. *A Poisson-Jensen type representation formula for subharmonic functions on stratified Lie groups* (con C. Cinti), **Pot. Analysis** 22, 151–169 (2005).
14. *Representation formulas and Fatou-Kato theorems for heat operators on stratified groups* (con F. Uguzzoni) **Rendiconti di Matematica, Serie VII**, 25, 53–67 (2005).
15. *The theory of energy for sub-Laplacians with an application to quasi-continuity* (con C. Cinti) **Manuscripta Math.** 118, 283–309 (2005).
16. *Maximum principle and propagation for intrinsically regular solutions of differential inequalities structured on vector fields* (con F. Uguzzoni) **J. Math. Anal. Appl.** 322, 886–900 (2006).
17. *Dirichlet problem with L^p -boundary data in contractible domains of Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.** 5, 579–610 (2006).
18. *Harnack inequality for non-divergence form operators on stratified groups* (con F. Uguzzoni) **Trans. Amer. Math. Soc.** 359, 2463–2481 (2007).

19. *Gauge functions, Eikonal equations and Bôcher's theorem on stratified Lie groups* (con E. Lanconelli) **Calc. Var. Partial Diff. Equations** 30, 277–291 (2007).
20. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Monografia (ca. 800 pagine) (con E. Lanconelli, F. Uguzzoni), **Springer Monographs in Mathematics**, vol. XXVI. New York, NY: Springer-Verlag, 2007 (XXVI p. + 800 p.). ISSN: 1439-7382, ISBN-10 3-540-71896-6.
21. *Taylor formula for homogeneous groups and applications*, **Math. Z.** 262, 255–279 (2009).
22. *Pizzetti's formula for H-type groups*, **Potential Analysis** 31, 311–333 (2009).
23. *Lifting of convex functions on Carnot groups and lack of convexity for a gauge function*, **Archiv der Math.** 93, 277–286 (2009).
24. *On left invariant Hörmander operators in $\mathbb{R}^N$. Applications to Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **Journal of Mathematical Sciences** 171, n.1, 22–33 (2010).
25. *On left-invariant Hörmander operators in $\mathbb{R}^N$: applications to the Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), (Russian) **Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.** 36, 24–35 (2010).
26. *An ODE's version of the formula of Baker, Campbell, Dynkin and Hausdorff and the construction of Lie groups with prescribed Lie algebra*, **Mediterr. J. Math.** 7, 387–414 (2010).
27. *Topics in Noncommutative Algebra. The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin.* (con R. Fulci), **Lecture Notes in Mathematics**, vol. 2034, Springer-Verlag, 2012 (XXII p.+ 498 p.). ISBN 978-3-642-22596-3
28. *A new proof of the existence of free Lie algebras and an application* (con R. Fulci), **ISRN Algebra**, Volume 2011 (2011), Article ID 247403, 11 pages. doi:10.5402/2011/247403
29. *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **Commun. Pure Appl. Anal.** 11, 1587–1614 (2012).
30. *A new characterization of convexity in free Carnot groups* (con E. Lanconelli), **Proc. Amer. Math. Soc.** 140, 3263–3273 (2012).
31. *Matrix exponential groups and Kolmogorov-Fokker-Planck equations* (con E. Lanconelli), **J. Evol. Equ.** 12, 59–82 (2012)
32. *The early proofs of the Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin* (con R. Achilles), **Arch. Hist. Exact Sci.** 66, 295–358 (2012).
33. *On the Dirichlet problem and the inverse mean value theorem for a class of divergence form operators* (con B. Abbondanza), **J. London Math. Soc.** 87, 321–346 (2013). Doi: 10.1112/jlms/jds050.
34. *H-convex distributions in stratified groups* (con E. Lanconelli, V. Magnani, M. Scienza), accettato per la pubblicazione in **Proc. Amer. Math. Soc.** (2012); il titolo è visibile nella sezione Articles in Press (http://www.ams.org/cgi-bin/mstrack/accepted_papers?jrn1=proc).
35. *Subharmonic functions in sub-Riemannian settings* (con E. Lanconelli), **J. Eur. Math. Soc.** 15, 387–441 (2013); doi: 10.4171/JEMS/364.
36. *Convexity of average operators for subsolutions to subelliptic equations* (con E. Lanconelli, A. Tomasoli), to appear in **Analysis and PDEs**, 2013.

37. *Normal families of functions for subelliptic operators and the theorems of Montel and Koebe* (con E. Battaglia), **J. Math. Anal. Appl.**, 409, 1–12 (2014).
ISSN: 0022-247X, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.062>
(<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X13006203>)
38. *On the convergence of the Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin series in infinite-dimensional Banach-Lie algebras* (con S. Biagi), **Linear and Multilinear Algebra**, (2013),
doi: 10.1080/03081087.2013.839674

Pubblicazioni scientifiche a carattere divulgativo:

39. Bonfiglioli, A., Valentini, C. (editori): *Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics*, Edizioni Aspasia, Bologna (2000).
40. “*Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics*” Bologna, 12 ottobre - 3 dicembre 2000 (con C. Valentini), in “Matematica, Arte, Tecnologia, Cinema” Atti della Mostra e del Convegno, Bologna 2000, Springer Italia (2001).
41. *Mathematics meets Art: Escher, Reutersvärd and Saffaro at Bologna 2000* (con C. Valentini), in “Mathematics, Art, Technology, and Cinema” a cura di M. Emmer, Springer Verlag, 2003, 33–38.

Seminari dipartimentali (a stampa o su rivista elettronica¹; dal 2007 anche indicizzati su Mathematical Reviews)

42. *Gruppi di Carnot associati a campi vettoriali*, in: Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna; Anno Accademico 2001/2002, 27–46, Tecnoprint: Bologna (2002).
43. *Un teorema di Liouville non lineare sui semispazi dei gruppi di passo due*, in: Seminario di Analisi Matematica, Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna; Anno Accademico 2002/2003, 25–33, Tecnoprint: Bologna (2003).
44. *Gauge functions, eikonal equation and Bôcher theorem on stratified Lie groups* (con E. Lanconelli), in: Mathematical Analysis Seminar, University of Bologna Department of Mathematics: Academic Year 2005/2006 (Italian), 55–63, Tecnoprint: Bologna (2007).
45. *Taylor formula for homogeneous groups and applications*, in: “Bruno Pini” Mathematical Analysis Seminar: University of Bologna Department of Mathematics: Academic Year 2007/2008 (Italian), 43–69, Tecnoprint: Bologna (2008).
46. *I Teoremi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin. Storia, prove, problemi aperti* in: “Bruno Pini” Mathematical Analysis Seminar (electronic, ISSN 2240-2829), University of Bologna Department of Mathematics: Academic Year 2009/2010 (Italian), 1–47 (2008).

¹<http://mathematicalanalysis.unibo.it/>

Lavori sottoposti per la pubblicazione e preprints:

- (i) *Finite-dimensional Lie algebras of complete Hörmander vector fields and applications* (con S. Biagi), submitted (2013).
- (ii) *Towards a graded q -CBH identity* (con J. Katriel), preprint (2013).
- (iii) *An Introduction to Subelliptic Laplacians*, Monografia, first draft version (2013).

Articoli in preparazione:

- (iv) *The contribution of Ernesto Pascal to the so-called Campbell-Hausdorff formula*, in preparazione (2011).
- (v) *Notions of Curvature: From the Riemannian to the sub-Riemannian case* (con E. Lanconelli, V. Martino, A. Montanari), Monografia in preparazione (2010).

Materiale didattico (in preparazione):

- (vi) *An Introduction to Subelliptic Laplacians*, Monograph (300 pagine). Alcuni capitoli sono disponibili per gli studenti in versione draft, su richiesta.
- (vii) *Istituzioni di Matematica 2, Teoria ed Esercizi*, Monografia (Italian), in preparazione (500 pagine). Già parzialmente disponibile per gli studenti all'url <http://didattica.ambra.unibo.it/>
- (viii) *Manuale di $\LaTeX$* (a cura di A. Bonfiglioli e C. Cinti), Monografia (Italian), in preparazione. Disponibile su richiesta.

Descrizione generale dell'attività scientifica

La mia attività di ricerca si inquadra nello studio di alcuni operatori differenziali del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva, ma non ellittici, che rientrano nella classe di ipoellitticità introdotta da Hörmander. Fra tali operatori, particolarmente significativi sono i sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi di Carnot $\mathbb{G}$, i quali approssimano localmente ogni operatore di Hörmander. A partire dai generatori di un gruppo stratificato $\mathbb{G}$, si possono modellare operatori differenziali più generali dei sub-Laplaciani (ad esempio, con coefficienti poco regolari e di tipo non variazionale), anch'essi oggetto della mia ricerca.

La principale motivazione dei miei studi è dovuta all'interesse che attualmente hanno alcuni tipi di equazioni sui gruppi stratificati. Difatti, negli ultimi tre decenni, dapprima sporadicamente e poi in modo via via più frequente e sistematico, in contesti sia applicativi sia teorici, appaiono equazioni differenziali alle derivate parziali lineari e non lineari, in forma variazionale e non variazionale, che vengono usualmente (e forse impropriamente) chiamate di tipo ellittico-*degenere*. Questa terminologia, piuttosto generica, non appare del tutto appropriata per classificare queste equazioni: la forma caratteristica di esse è sì soltanto semidefinita, ma le strutture algebrico-geometriche soggiacenti sono spesso estremamente ricche, seppure non di tipo euclideo. Tali equazioni appaiono in vari contesti, anche molto diversi fra loro, quali ad esempio la teoria geometrica delle funzioni di più variabili complesse, la modellizzazione matematica dei materiali cristallini, i problemi di curvatura per le varietà di Cauchy-Riemann, la teoria dei sistemi di controllo, la geometria sub-Riemanniana, i processi di diffusione, la modellizzazione matematica della visione umana o computerizzata, la Finanza Matematica, ecc.

Tra le strutture algebrico-geometriche spesso associate a queste equazioni vi è in particolare quella dei gruppi stratificati (o come vengono recentemente chiamati, *gruppi di Carnot*), una sotto-classe dei gruppi di Lie nilpotenti la cui associata algebra di Lie ammette una stratificazione, ossia una decomposizione in *strati* del tipo seguente $\mathfrak{G}_1 \oplus [\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1] \oplus [[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1], \mathfrak{G}_1] \oplus \dots$. Tale decomposizione rende questi gruppi molto ricchi di proprietà e contemporaneamente relativamente semplici da studiare anche con metodi elementari e diretti. Naturalmente associati ai gruppi di Carnot sono i relativi sub-Laplaciani, operatori differenziali del secondo ordine somma di quadrati di campi vettoriali che generano il primo strato $\mathfrak{G}_1$. L'usuale gruppo additivo su $\mathbb{R}^N$ ed il classico operatore di Laplace Δ sono certamente l'esempio più semplice di gruppo stratificato (commutativo) e di sub-Laplaciano (strettamente ellittico); il ben noto e molto studiato gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e l'associato Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ costituiscono invece il primo esempio non banale di gruppo stratificato (non commutativo) e di sub-Laplaciano ellittico-“degenere”. Appare subito evidente dall'esempio del gruppo di Heisenberg che, sebbene i sub-Laplaciani condividano molte proprietà con gli operatori ellittici, non si può pensare che tutti i risultati classici valgano anche nel caso non euclideo, né tanto meno che i metodi e gli approcci dimostrativi siano gli stessi del caso ellittico non-degenere.

La mia attività scientifica si articola su alcuni nuclei principali, strettamente correlati tra di loro:

- Lo studio della struttura dei gruppi di Carnot e dei loro sub-Laplaciani $\mathcal{L}$.
- Lo studio dell'operatore del calore $\mathcal{H} = \mathcal{L} - \partial_t$ sui gruppi di Carnot e degli operatori in forma di non-divergenza modellabili su $\mathcal{L}$ e su $\mathcal{H}$ in strutture anche più generali dei gruppi di Carnot.
- La Teoria del Potenziale per $\mathcal{L}$ e per gli operatori in forma di divergenza su gruppi di Lie qualunque.
- Gli aspetti geometrico-differenziali, algebrici e le applicazioni alla teoria dei gruppi di Lie e alla teoria delle ODE e PDE del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin.

Nel seguito, fornisco una breve descrizione di questi topics di ricerca.

§.1. Nel corso della mia attività scientifica, ho avuto modo di studiare in modo sistematico la **struttura dei gruppi stratificati** e svariate delle proprietà dei sub-Laplaciani ad essi associati. Ad esempio, nei lavori [8, 9, 10, 12, 20, 27, 28, 29, 30, 34], unitamente a problemi specifici di Analisi, viene fornita parte del background algebrico-geometrico per lo studio approfondito dei gruppi stratificati, seguendo sempre un approccio diretto ed analitico. In particolare, vengono confrontate la definizione classica di gruppo di Carnot e una definizione operativa di gruppo *omogeneo* di Carnot, estremamente utile nel contesto analitico. Alcuni argomenti che ho potuto approfondire, fondamentali anche per l'Analisi Matematica, sono perciò di carattere essenzialmente geometrico: ad esempio le algebre libere e nilpotenti, il procedimento di Lifting dei gruppi stratificati sui gruppi liberi, l'equivalenza dei sub-Laplaciani, la cosiddetta formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, la costruzione di gruppi di Carnot a partire da campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$, le algebre e i gruppi di tipo H, la formula di Taylor per i gruppi omogenei, la nozione di convessità ecc.

Una delle classi di gruppi di Carnot che ho studiato più in dettaglio è quella dei gruppi di tipo H: dopo aver caratterizzato tali gruppi in modo sufficientemente esplicito, ho studiato un risultato di non-esistenza per un problema semilineare con esponente critico su tutti i semispazi (caratteristici e non) dei gruppi di tipo H (si vedano [7, 8]). Questo risultato migliora risultati molto recenti in materia.

Recentemente, ho studiato strutture più generali dei gruppi di Carnot: i gruppi omogenei, [21], e i gruppi non nilpotenti su $\mathbb{R}^N$ che si possono costruire a partire da certi campi vettoriali di tipo Hörmander (si vedano [24, 25, 26, 29]). Sui primi gruppi ho dimostrato l'analogo della formula di Taylor (con applicazioni per ottenere stime di Schauder ed applicazioni a problemi di reale analiticità); sulle seconde strutture si è provata l'esistenza e le buone proprietà della soluzione fondamentale, tra cui una proprietà di invarianza per traslazione a sinistra; inoltre abbiamo fornito condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore di Hörmander sia invariante a sinistra su un gruppo di Lie.

§.2. Il citato background algebrico-geometrico per lo studio dei gruppi stratificati e dei sub-Laplaciani è stato ampiamente e approfonditamente trattato nella monografia [20], il cui scopo è appunto quello di fornire i dettagli analitici e geometrici per lo studio dei sub-Laplaciani e della Teoria del Potenziale ad essi associata. Recentemente, ho potuto approfondire lo studio di queste proprietà algebriche dei gruppi stratificati, partendo da uno dei più importanti e significativi risultati sui gruppi di Lie: la formula che porta i nomi di **Baker, Campbell, Dynkin e Hausdorff**. È possibile affrontare lo studio di questa formula e fornirne dimostrazioni sia con metodi di Algebra (serie formali associate a certe algebre di tensori), sia di Analisi (di certe equazioni differenziali ordinarie), sia di Geometria Differenziale (dei gruppi di Lie). Una esposizione unitaria e self-contained di tutti questi differenti approcci appare nella monografia [27]; alcune osservazioni collaterali di carattere puramente algebrico sono raccolte in [28], mentre la prova di una formula di tipo Campbell-Hausdorff relativamente ad un contesto di equazioni differenziali ordinarie è stato studiato in [26] (ed è attualmente in fase di miglioramento in [??]).

Osserviamo esplicitamente che vi sono ancora problemi aperti sulla formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, ossia il suo q -analogo che compare nella teoria della Meccanica Quantistica. Attualmente sto lavorando a tale problema con l'esperto mondiale in materia Jacob Katriel, [ii].

§.3. Una parte cospicua della mia ricerca è poi dedicata alla **Teoria del Potenziale** per i sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi stratificati. A partire dalle buone proprietà della soluzione fondamentale Γ di $\mathcal{L}$ è possibile ricostruire gran parte della teoria classica: cito ad esempio teoremi di tipo Harnack-Liouville, caratterizzazione della subarmonicità rispetto a $\mathcal{L}$, formule di media per $\mathcal{L}$, teoremi di rappresentazione, formule di tipo Poisson&Jensen, capacità ed energia per $\mathcal{L}$, la formula di Pizzetti su gruppi di Heisenberg e su quelli di tipo H, eccetera. Si vedano i lavori [1, 2, 3, 5, 13, 15, 17, 22]. Come applicazioni significative di questa Teoria del Potenziale, si ottengono anche principi del massimo per $\mathcal{L}$ su aperti illimitati [3], o proprietà fini di regolarità, [15], di grande interesse nella letteratura recente, o, ancora, lo studio del problema di Dirichlet associato ad $\mathcal{L}$ con dati al bordo di classe L^p e gli spazi di Hardy ad essi associati [17].

Un'altra applicazione della Teoria del potenziale sui gruppi di Carnot si ottiene nello studio dell'equazione Eikonale e dei teoremi di tipo Bôcher per la rimozione delle singolarità [19].

Molto recentemente mi sono occupato di Teoria del Potenziale per operatori in forma di divergenza, ma non necessariamente in forma di somme di quadrati di Hörmander, nè necessariamente invarianti a sinistra su gruppi di Lie. Si è provato che, in presenza di una soluzione fondamentale positiva (e con proprietà di annullamento all'infinito) si può dare una teoria completa delle associate funzioni subarmoniche e dei relativi operatori di media, [33, 35, 37]. Alcune delle caratterizzazioni della subarmonicità fornite nei citati lavori sono nuove anche nel caso classico del Laplaciano (si veda anche il recentissimo [36]).

§.4. Un'altra parte consistente della mia ricerca è dedicata all'**Operatore del Calore** $\mathcal{H} = \Delta_{\mathbb{G}} - \partial_t$ naturalmente associato ai gruppi di Carnot (si vedano [4, 6, 11, 14, 18]). Sebbene molte proprietà di $\mathcal{H}$ siano note in letteratura, è possibile fornire delle prove dirette dell'esistenza e delle buone proprietà della soluzione fondamentale Γ per $\mathcal{H}$: in particolare, ho studiato in dettaglio le stime Gaussiane per Γ e per le sue derivate, il relativo problema di Cauchy e la disuguaglianza di Harnack, le caratterizzazioni delle funzioni $\mathcal{H}$ -caloriche non negative (teoremi di tipo Fatou e Kato). I metodi seguiti sono consistenti con l'approccio diretto con cui sono stati studiati i gruppi stratificati, in particolare facendo uso di elementi di Teoria del Potenziale. Questi risultati si applicano allo studio dei seguenti operatori "a coefficienti variabili" (che *non* possono essere posti in forma di divergenza)

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x,t) X_i X_j - \partial_t, \quad \sum_{i,j} a_{i,j}(x) X_i X_j$$

(essendo $\sum_i X_i^2$ un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$ e $(a_{i,j})_{i,j}$ una matrice definita positiva ad entrate Hölderiane): tali operatori intervengono naturalmente come linearizzazioni di operatori totalmente non-lineari. In particolare, si è dimostrata la disuguaglianza di Harnack per tali operatori, [18], e l'esistenza delle soluzioni fondamentali per essi attraverso un'adeguata estensione del metodo della Parametrice di Levi, [11]: tale estensione è non banale e sfrutta opportune *stime Gaussiane uniformi* per gli operatori "congelati" $\sum_{i,j} a_{i,j}(x_0, t_0) X_i X_j - \partial_t$ (si veda [4]), per ottenere le quali è necessario sfruttare anche risultati di Lifting, [12], nonché l'equivalenza dei sub-Laplaciani sui gruppi liberi, [10]. Da questo punto di vista, lo studio degli operatori appena citati costituisce una *summa* di gran parte della mia attività di ricerca (nonché una rilevante motivazione per essa).

Utile per lo studio di questi operatori è la nozione di convessità orizzontale (h-convessità) sui gruppi di Carnot, [23]. A tale proposito, ho ottenuto alcuni risultati di tipo algebrico/geometrico-differenziale sulla h-convessità: in particolare ho dimostrato che funzioni h-convesse *liftano* a funzioni h-convesse quando si lifta un gruppo di Carnot al relativo gruppo libero nilpotente. Inoltre, ho trovato un esempio di funzione gauge su un gruppo di passo due con inattese proprietà di *non* convessità, rispondendo negativamente ad un problema finora aperto. Caratterizzazioni deboli della h-convessità sono poi state ottenute nel recentissimo lavoro [34].

Attività didattica (presso l'Università di Bologna)

A.A. 1998/1999:

Ciclo annuale di esercitazioni e partecipazione alla commissione d'esame per il corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il corso di Laurea in Scienze Ambientali, Università di Bologna, sede di Ravenna (referente: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 1999/2000 e 2000/2001:

Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.

A.A. 2001/2002:

- Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica 2 per il Corso di Laurea in Scienze dell'Informazione, sede di Cesena (referente: prof.ssa Annamaria Montanari).
- Ciclo di dieci ore di didattica, finalizzata alla ricerca, per i dottorandi in Matematica (XVII Ciclo, Bologna) sul tema Introduzione ai Gruppi di Carnot.

A.A. 2002/2003:

- Corso di accoglienza per matricole per il corso di Istituzioni di Matematica presso il corso di Laurea in Chimica.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (referente: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 2003/2004:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-A per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-B per il Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica (referente: prof. Enrico Obrecht).

- Corso di Esercitazioni in Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (referente: prof.ssa Valeria Simoncini).

A.A. 2004/2005:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna.
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-C per il Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e delle Telecomunicazioni (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Ciclo di Seminari rivolti agli studenti del corso di Istituzioni di Matematica 1 per il Corso di Laurea in Scienze Ambientali, sede di Ravenna (referente: prof.ssa Valeria Simoncini).
- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).

A.A. 2005/2006:

- Corso di accoglienza per matricole di Ingegneria dell'Università di Bologna (svoltosi dal 7/09/2005 al 20/09/2005).
- Ciclo di venti ore di lezione per il corso di Istituzioni di Matematica – Corso di Laurea in Chimica dell'Università di Bologna (referente: prof.ssa Emanuela Caliceti).
- Corso di Esercitazioni in Analisi Matematica L-C per il Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica e delle Telecomunicazioni (referente: prof. Enrico Obrecht).
- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).

A.A. 2006/2007:

- Ciclo di dieci ore di lezione per il corso di Istituzioni di Matematica – Corso di Laurea in Chimica dell'Università di Bologna (referente: prof.ssa Emanuela Caliceti).
- Ciclo di dodici ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).
- Ciclo di 90 ore (due corsi di 45 ore ciascuno) per le Attività Professionalizzanti per il C.d.L. in Matematica (Laurea Triennale): Approfondimenti di $\text{\LaTeX}$.

A.A. 2007/2008:

- Titolarità del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità del Corso di Fondamenti di Matematica, presso il C.d.S. in Tecnologia per la Conservazione ed il Restauro, Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore di lezione).
- Ciclo di dodici ore di lezione per il corso di Alta Formazione in Finanza Matematica - Università di Bologna (referenti: proff. Sergio Polidoro e Andrea Pascucci).
- Titolarità del Corso di Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore).

- Ciclo di 15 ore di lezione per il Corso di Dottorato in Analisi Armonica “Gruppi Stratificati e Teoria del Potenziale per i s sub-Laplaciani”.

A.A. 2008/2009:

- Titolarità del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità del Corso di Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore).

A.A. 2009/2010:

- Titolarità del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità del Corso di Analisi Armonica, presso la Laurea Magistrale in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore).

A.A. 2010/2011:

- Titolarità del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità di un Modulo del Corso di Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore). Il corso è tenuto parallelamente (per ulteriori 24 ore di lezione) in lingua inglese, poiché rientra nel Progetto Europeo EU-US “Atlantis” (referente Prof.ssa Giovanna Citti).
- Corso “Introduction to Stratified Lie Groups” per il Corso di Dottorato in Matematica, Università di Bologna (30 ore).

A.A. 2011/2012:

- Titolarità del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (6 crediti formativi, 52 ore di lezione).
- Titolarità di un Modulo del Corso di Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore).
- Lezione dal titolo “Il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff; applicazioni alla costruzione di gruppi di Lie” nel ciclo Topics in Mathematics 2011/2012, per gli studenti di Dottorato in Matematica di Bologna (15 marzo 2012).

A.A. 2012/2013:

- Titolarità di un modulo del Corso di Istituzioni di Matematica 2, presso il C.d.S. in Scienze Ambientali, Ravenna (4 crediti formativi, 32 ore di lezione).
- Titolarità di un Modulo del Corso di Analisi Superiore 2, presso la Laurea Magistrale del C.d.S. in Matematica (3 crediti formativi, 24 ore).
- Attività didattica nel corso di Analisi 2 (16/20 ore), Laurea Triennale in Matematica, Bologna (Titolare: Prof. E.Lanconelli).
- Attività didattica (10 ore) per Docenti di Scuole Secondarie Superiori (dell’Emilia Romagna) relativa al Piano nazionale Lauree Scientifiche (PLS) del M.I.U.R.; Laboratorio dal titolo “L’Infinito Matematico: Alcune suggestioni”.

Tesi di Laurea e di Dottorato:

- Nell'A.A. 2011/2012 sono stato relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica “La Soluzione Fondamentale per i Sub-Laplaciani sui Gruppi Nilpotenti di Passo Due” del dott. Andrea Tamagnini.
- Sono attualmente relatore della tesi di Laurea Magistrale in Matematica “Famiglie Normali di Funzioni Armoniche per Operatori Subellittici” della studentessa Erika Battaglia (laureanda per l'A.A. 2012/13).
- Nell'A.A. 2011/2012 sono stato relatore della tesi di Laurea Triennale in Matematica “Una dimostrazione algebrica del teorema di Campbell, Baker, Hausdorff” dello studente Mirko Ruffilli.
- Sto collaborando alla tesi di Dottorato in Matematica della dott.ssa Beatrice Abbondanza (XXVI Ciclo, Bologna) e del dott. Stefano Biagi (XXVII Ciclo, Bologna).

Attività scientifico-didattica non Accademica:

• Per dodici Anni Accademici (dal 1999/2000 al 2009/10 e nell'A.A. 2011/12) ho svolto una collaborazione con C.E.U.R. (“Centro Europeo Università e Ricerca”) per il Tutorato in Analisi Matematica per studenti di Ingegneria e Scienze MM.FF.NN. presso le Residenze Universitarie di Eccellenza “Alma Mater” e “San Felice” di Bologna.

Questa duratura esperienza è stata per me di grande interesse sia didattico sia professionale poiché, potendo seguire studenti inquadrati in una struttura di “eccellenza”, mi ha permesso di svolgere attività didattica con un gruppo di discenti che affrontano lo studio della Matematica con fortissima motivazione e interesse, soprattutto verso gli aspetti formativi della Matematica per la loro futura esperienza lavorativa.

• Da giugno 2008 a settembre 2010 ho svolto un'attività volontaria di sostegno presso l'Istituto per non vedenti “F. Cavazza” di Bologna, per la didattica della Matematica in presenza di diversabilità visiva. Questa esperienza mi ha permesso di entrare in contatto con lo speciale apprendimento dell'Algebra e, in particolare, della Geometria, da parte dello studente non-vedente.

• Da settembre 2010 a maggio 2012 ho collaborato con la Casa Editrice Zanichelli di Bologna come editor e revisore nel Progetto MATutor (per la realizzazione di materiale editoriale e strumenti multimediali per lo studio della Matematica nella Scuola Secondaria Superiore), e sono tra i revisori e tra i realizzatori di testi ed esercizi per il libro MATutor per la quinta Liceo Scientifico [M. Bergamini, G. Barozzi, Zanichelli, Bologna (2012)].

Partecipazione scientifica a Progetti di Ricerca:

- Membro del Comitato Organizzatore per il Convegno “Geometric methods in PDE’s”, INDAM Meeting on the occasion of the 70th birthday of Ermanno Lanconelli; Cortona 27–31/5/2013.
- Coordinatore scientifico del Progetto G.N.A.M.P.A. 2012, “Equazioni alle Derivate Parziali Lineari e non-Lineari in Contesti sub-Riemanniani” (durata 12 mesi – giugno 2012/maggio 2013).
- Membro del Programma P.R.I.N. 2009 (Programmi di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale). Titolo: “Equazioni di diffusione in ambiti sub-riemanniani e problemi geometrici associati”. Coordinatore: Prof. I. Capuzzo Dolcetta, Responsabile scientifico: Prof. E. Lanconelli; Ateneo: Università degli Studi di Bologna, protocollo: 2009KNZ5FK 005.
- Membro del Programma P.R.I.N. 2007 (Programmi di Ricerca Scientifica di Rilevante Interesse Nazionale). Titolo: “Equazioni subellittiche e problemi geometrici associati”. Coordinatore: Prof. I. Capuzzo Dolcetta, Responsabile scientifico: Prof. E. Lanconelli; Ateneo: Università degli Studi di Bologna, protocollo: 2007WECYEA 003.
- Partecipante al Progetto R.F.O. 2010 (Ricerca Fondamentale Orientata). Coordinatore: Prof. B. Franchi.
- Membro del Progetto G.A.L.A. (Geometrical Analysis in Lie groups and Applications). Coordinatore: Prof.ssa G. Citti. STREP EU-FP6; periodo: settembre 2006-2009.
- Membro del Progetto A.G.A.P.E. (Analysis in Lie Groups and Applications to Perceptual Emergences). Coordinatore: Prof.ssa G. Citti. Progetto finanziato dall’Università di Bologna; marzo 2011 (durata 5 anni).
- Membro del Progetto Giovani Ricercatori 1998. Titolo: “Moto per curvatura di Levi di ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^n$ ”. Responsabile del progetto: Prof.ssa A. Montanari; Finanziato nel E.F. 1998.
- Membro del Progetto Giovani Ricercatori 1999. Titolo: “Equazioni differenziali degeneri non ipoellittiche in finanza matematica”. Responsabile: Prof. A. Pascucci; finanziato nel E.F. 1999.
- Responsabile del Progetto Giovani Ricercatori 2000. Titolo: “Disuguaglianza di Harnack e teoremi di esistenza per una classe di equazioni non lineari con forma caratteristica semidefinita positiva”; finanziato nel E.F. 2000.

Seminari e Convegni:

- 12 ottobre - 3 dicembre 2000: Ho collaborato all’organizzazione dell’evento “*Matematica, Arte e Tecnologia*” (Bologna, 2000), patrocinato dall’U.M.I. durante l’Anno Mondiale della Matematica (in particolare alla mostra “*Matematica, Arte e Tecnologia: da Escher alla computer graphics*” del cui catalogo sono stato co-editore).
- Ho tenuto il Seminario intitolato *Liouville-type theorems for sub-Laplacians on Carnot groups and applications*, durante il convegno “*Liouville Theorems in Riemannian and Sub-Riemannian settings*”, Bologna, 23-24 novembre 2006, Dipartimento di Matematica.
- Ho tenuto il seminario intitolato *Some Results on Convex Functions on Carnot Groups: Lifting and Gauge-Functions*, durante il convegno “*Viscosity, metric and control theoretic methods in nonlinear PDE’s: analysis, approximations, applications*”, Roma, 3-5 settembre 2008, La Sapienza.

- Ho tenuto il seminario dal titolo “*Subharmonic functions in sub-Riemannian settings: Characterizations of subharmonicity*”, Pisa, 22 febbraio 2012, relativamente a: “A one day workshop on Symmetry, Subharmonicity and Nonsmooth Vector Fields”, Department of Mathematics, Pisa University, 2-22-2012.
- Ho tenuto il seminario dal titolo “*Gruppi di Lie associati ad alcune classi di operatori di Hörmander*”, Dipartimento di Matematica, Università di Padova (21 febbraio 2013), relativamente al “Seminario di Equazioni Differenziali e Analisi Complessa”.
- Ho tenuto la conferenza divulgativa dal titolo “*Infinito in Matematica: Alcune suggestioni*”, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (12 aprile 2013), relativamente alla “Giornata Matematica per gli studenti Liceo Righi”.
- Programmata per settembre 2013 è una serie di talk e un periodo di visita allo I.M.A.C. di Castellón, Spagna (www.imac.uji.es) e allo I.C.M.A.T. di Madrid (www.icmat.es).

Seminari dipartimentali:

- (i) *Gruppi di Carnot associati a campi vettoriali*, Seminario di Analisi Matematica, 15 gennaio 2002, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- (ii) *Un teorema di Liouville non lineare sui semispazi dei gruppi di passo due*, Seminario di Analisi Matematica, 25 febbraio 2003, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- (iii) *La formula di Taylor sui gruppi omogenei e applicazioni*, Seminario di Analisi Matematica, 6 marzo 2008, Dipartimento di Matematica, Bologna.
- (iii) *I teoremi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin. Storia, prove, problemi aperti*, Seminario di Analisi Matematica, 20 maggio 2010, Dipartimento di Matematica, Bologna.

Breve descrizione delle singole pubblicazioni

Nel lavoro [1], dopo aver ricavato delle formule integrali di media relative al sub-Laplaciano $\mathcal{L}$ su un gruppo di Carnot per la rappresentazione di funzioni regolari (simili alle classiche formule di media per il Laplaciano ordinario), viene provata una disuguaglianza che generalizza e riunisce i classici Teoremi di Liouville e Harnack per il caso dei sub-Laplaciani $\mathcal{L}$. Viene esibita inoltre una formula di rappresentazione per funzioni u per le quali $\mathcal{L}u$ è un polinomio. Come conseguenza, sono fornite alcune condizioni che assicurano che u è una funzione polinomiale ogniqualvolta $\mathcal{L}u$ è un polinomio. Per finire, si dà un'applicazione di questi risultati: se ψ è un'applicazione C^2 che commuta con $\mathcal{L}$, allora ciascuna delle sue componenti è un polinomio. Questi risultati sono ottenuti con metodi diretti a partire dalle citate formule di media.

Nel lavoro [5] vengono generalizzati al caso dei sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ sui gruppi stratificati $\mathbb{G}$ alcuni rilevanti risultati della classica Teoria del Potenziale, con particolare riguardo allo studio delle funzioni $\mathcal{L}$ -subarmoniche. Un ruolo rilevante rivestono i teoremi di caratterizzazione e di rappresentazione per funzioni $\mathcal{L}$ -subarmoniche su $\mathbb{G}$: a tale proposito vengono fornite generalizzazioni del classico Teorema di Riesz e della Formula di Poisson-Jensen (poi ripresa in [13]). Viene inoltre sviluppata un'opportuna teoria di Nevanlinna per i sub-Laplaciani. Questi risultati rivestono un ruolo fondamentale ad esempio nella prova dei Principi del Massimo per $\mathcal{L}$ su aperti non limitati (si veda [3]).

Nel lavoro [3], viene data un'applicazione significativa alla Teoria del Potenziale introdotta in [5]: viene infatti stabilito il Principio del Massimo su una vasta classe di aperti *non-limitati*. Negli ultimi anni, grande interesse è stato dato al Principio del Massimo su aperti non limitati per le soluzioni della disuguaglianza differenziale $\Delta u + cu \geq 0$ (ove Δ è il Laplaciano classico in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e c è una funzione reale non positiva). Tale principio gioca un ruolo cruciale nella ricerca di proprietà di simmetria per le soluzioni delle equazioni di Poisson semilineari, mediante i ben noti metodi dei piani mobili o dello *sliding*. Nel caso classico, questo risultato viene di solito dimostrato mediante l'uso di opportune funzioni barriera su coni. In [3], si mostra come generalizzare al caso dei sub-Laplaciani tale risultato, senza ricorrere all'uso di funzioni barriera, ma solo grazie a opportuni argomenti di Teoria del Potenziale, già sviluppati nei lavori [1, 5] (in particolare, viene utilizzato il concetto di dominio *sottile all'infinito*). Questi Principi del Massimo su semispazi costituiscono altresì un punto di partenza nello studio del comportamento asintotico di funzioni $\mathcal{L}$ -subarmoniche *non* limitate superiormente su $\mathbb{G}$ (teoremi di tipo Phragmén-Lindelöf). Analogamente al caso del Laplaciano classico, questi comportamenti asintotici sembrano avere importanti legami con problemi agli autovalori associati all'operatore $\mathcal{L}$ ristretto al bordo del disco unitario.

Nei lavori [2] e [22] fornisco generalizzazioni ed alcune applicazioni della cosiddetta *Formula di Pizzetti*: questa formula (legata alla Teoria del Potenziale per il Laplaciano) fornisce un'espressione della media integrale su un disco $D(x, R)$ di una funzione regolare come serie di potenze (in R) i cui coefficienti sono gli iterati del Laplaciano (valutati in x). Le generalizzazioni che ho ottenuto si riferiscono dapprima al Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ e poi ad un generico sub-Laplaciano "ortonormale" $\mathcal{L}$ sui gruppi di tipo H. Le formule ottenute presentano sorprendenti analogie con quella classica, accanto ad alcune novità dovute alle strutture "sub-ellittiche" di $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ e $\mathcal{L}$: oltre alle potenze successive di $\Delta_{\mathbb{H}^N}$ o $\mathcal{L}$, compaiono le potenze della derivata "commutatoriale" ∂_t (o $\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n}$, ove i t_j denotano le coordinate del secondo strato della stratificazione del gruppo di tipo H). Mediante la Formula di Pizzetti, si prova poi molto semplicemente che le uniche funzioni poliarmoniche non negative sono funzioni polinomiali.

Nei lavori [10,12] viene iniziato lo studio di una certa classe di operatori di tipo parabolico sui gruppi di Carnot. Alcuni di questi risultati sono di carattere essenzialmente geometrico, anche se l'approccio è analitico. In [10] si affronta il delicato problema dell'equivalenza a meno di diffeomorfismi fra i vari sub-Laplaciani su un gruppo $\mathbb{G}$, dando una risposta affermativa a tale equivalenza nel caso in cui l'algebra

di $\mathbb{G}$ sia libera e presentando un controesempio nel caso contrario. Questo consente, nel caso libero, di rappresentare le soluzioni fondamentali dei sub-Laplaciani su $\mathbb{G}$ (e dei loro associati operatori del calore) in un modo “unitario”, più precisamente in termine della soluzione fondamentale di un operatore modello. Ciò apre la strada per ottenere stime uniformi delle soluzioni fondamentali di tutti i sub-Laplaciani su $\mathbb{G}$.

Per potere trattare il caso di un gruppo $\mathbb{G}$ *non* libero, in [12] si introduce poi una tecnica di *Lifting*, ispirata ai famosi risultati di Rothschild&Stein, che permette di ricondursi al caso libero. In [12] viene inoltre data una dettagliata presentazione dei gruppi di Carnot (poi estesa nella monografia [20]) che si sforza di essere accessibile ai non specialisti. In particolare viene fornita una utile caratterizzazione di tali gruppi (mediante la nozione di gruppo di Carnot *omogeneo*). In queste problematiche giocano un ruolo fondamentale le proprietà delle mappe esponenziali sui gruppi di Lie ed in particolare la formula di Campbell-Baker-Hausdorff (si vedano anche [9, 20, 27]).

Facendo uso dei risultati provati in [10, 12], nel lavoro [4] si affronta il problema delle stime uniformi delle soluzioni fondamentali di una importante famiglia di sub-Laplaciani. Seguendo la linea dei precedenti lavori, viene fornita innanzitutto una prova diretta dell’esistenza e delle principali proprietà delle soluzioni fondamentali Γ per i citati operatori del calore $\mathcal{L} - \partial_t$ su $\mathbb{G}$. In particolare vengono dimostrate in modo diretto, con metodi di confronto, stime gaussiane di Γ . Si mostra poi che tali stime sono uniformi al variare dell’operatore in opportune classi, facendo uso dei risultati di [10, 12] ed attraverso metodi di saturazione. Infine si ottengono “stime hölderiane uniformi” per Γ e per le sue derivate.

Tali stime consentono, nel lavoro [11] (si veda anche [6]), di adattare il metodo della parametrice di Levi alla costruzione della soluzione fondamentale per un operatore a coefficienti hölderiani in forma di non-divergenza, “parabolico” rispetto ai campi vettoriali del sub-gradiente di $\mathbb{G}$. Con una integrazione nella variabile temporale, si costruisce poi una soluzione fondamentale locale per il corrispondente operatore di tipo “ellittico” (sempre rispetto ai suddetti campi). Questo è reso possibile da opportune stime per tempi lunghi, che risultano particolarmente delicate e vengono ottenute in [11] modificando i coefficienti dell’operatore fuori da un insieme compatto. Gli operatori studiati in [11] trovano applicazioni in svariati campi. In particolare intervengono nella linearizzazione di equazioni ellittiche degeneri totalmente nonlineari quali l’equazione della curvatura di Levi.

Nel lavoro [18] si continua lo studio degli operatori in forma di non-divergenza trattati in [11]. In particolare si provano stime puntuali dal basso per le loro soluzioni fondamentali, vengono studiate alcune proprietà delle relative funzioni di Green su domini cilindrici e finalmente si ottiene una disuguaglianza di Harnack invariante. Tale disuguaglianza viene ottenuta, a partire dai risultati in [4,10,12,11], seguendo alcune idee di Krylov&Safonov e di Fabes&Stroock insieme ad alcuni non banali argomenti di approssimazione. In particolare si sfrutta il fatto di poter ben approssimare arbitrari domini cilindrici con domini regolari per il problema di Dirichlet e di poter ottenere buone stime per le funzioni di Green su tali domini approssimanti.

Il lavoro [14] è in linea con la trattazione sistematica seguita in [4,10,12] e contiene fra l’altro alcuni raffinamenti di risultati ottenuti in [4], relativi al problema di Cauchy per operatori del calore su $\mathbb{G}$. In [14] viene infatti provata una formula di tipo Poisson&Stieltjes che consente di ottenere una caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{L}$ -caloriche non-negative attraverso opportune formule di rappresentazione. Vengono poi forniti dei teoremi di tipo Fatou e dei teoremi di unicità analoghi ai risultati provati da Kato per l’equazione del calore classica.

Di notevole interesse per lo studio di alcuni operatori non lineari è lo studio della convessità orizzontale (h-convessità) nei gruppi di Carnot. Ho provato alcuni risultati sulla h-convessità nel lavoro [23]. Infatti, sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo r e m generatori e di dimensione omogenea Q . Sia $\mathbb{F}_{m,r}$ il gruppo di Lie libero di passo r e m generatori. Sia inoltre $\pi : \mathbb{F}_{m,r} \rightarrow \mathbb{G}$ una mappa di lifting. In [23] viene dimostrato che ogni funzione h-convessa u on $\mathbb{G}$ si lifta ad una funzione h-convessa $u \circ \pi$ su $\mathbb{F}_{m,r}$ (rispetto

ad un opportuno frame orizzontale su $\mathbb{F}_{m,r}$). Un altro scopo dello stesso lavoro è di esibire un esempio di sub-Laplaciano $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2$ su di un gruppo di Carnot di passo due tale che la relativa funzione $\mathcal{L}$ -gauge d (i.e., d^{2-Q} è la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$) non sia h-convessa rispetto al frame orizzontale $\{X_1, \dots, X_m\}$. Questo fatto fornisce una risposta negativa ad una questione recentemente posta da Danielli, Garofalo e Nhieu. Ulteriori risultati sulla h-convessità sono infine forniti: ad esempio, esibisco una classe di mappe su $\mathbb{G}$ che preservano la convessità orizzontale.

Sullo studio della h-convessità siamo recentemente tornati nel lavoro [30]. Una nota caratterizzazione delle usuali funzioni convesse in $\mathbb{R}^N$ assicura che una funzione superiormente semicontinua u è convessa se e solo se $u(Ax)$ è subarmonica (rispetto al classico operatore di Laplace) per ogni matrice simmetrica definita-positiva A . In [30] viene dimostrato che un risultato analogo, *mutatis mutandis*, vale nel caso di gruppi di Carnot liberi $\mathbb{G}$, quando si considera la convessità in senso viscoso di Lu, Manfredi e Stroffolini. Nel caso subellittico dei gruppi di Carnot, le applicazioni lineari $x \mapsto Ax$ del caso Euclideo devono essere rimpiazzate da opportuni isomorfismi di gruppo $x \mapsto T_A(x)$, il cui differenziale preserva il primo strato della stratificazione di Lie($\mathbb{G}$). Nell'ulteriore lavoro, [34], viene estesa la caratterizzazione di Dudley delle funzioni convesse: precisamente si dimostra che ogni distribuzione con matrice Hessiana orizzontale non negativa è associata ad una funzione h-convessa.

Nel lavoro [8] (si veda anche la nota preventiva [7] e il seminario [43]) vengono dimostrati alcuni teoremi di tipo Liouville nonlineari su gruppi stratificati di passo due e in particolare su gruppi di tipo H (una notevole sottoclasse di gruppi di Carnot introdotta da Kaplan). Tali risultati sono inquadrati in un progetto che mira, attraverso un'analisi di blow-up e tecniche variazionali, ad ottenere risultati di esistenza per problemi semilineari su gruppi di Carnot. I risultati in [8] migliorano un recente teorema di Garofalo&Vassilev, utilizzando tecniche differenti dalle loro, ma ispirate a quelle introdotte in alcuni lavori di Lanconelli&Uguzzoni e di Uguzzoni. Una delle maggiori difficoltà in [8] è dovuta alla non compattezza dell'insieme dei punti caratteristici dei domini considerati, che rende particolarmente delicata la costruzione di barriere esplicite. In [8] viene infine fornita una caratterizzazione dei gruppi di tipo H, utile in un contesto analitico. Essa in particolare consente di scrivere in modo "esplicito" l'espressione dei sub-Laplaciani su tali gruppi, permettendo fra l'altro la costruzione delle menzionate barriere.

Una parte notevole della mia attività scientifica è dedicata alla Teoria del Potenziale per operatori subellittici: oltre ai già citati [1, 3, 5], lo studio di Teoria del Potenziale viene proseguito in [13, 15, 16, 17, 19, 33, 35, 37]. Nel lavoro [16] si provano alcuni principi di massimo debole e di propagazione dei massimi, per soluzioni intrinseche di disuguaglianze differenziali strutturate su campi vettoriali. La principale novità rispetto ai risultati preesistenti, sta nella debole regolarità richiesta alla soluzione, che può non essere differenziabile in senso classico ma solo lungo le curve integrali dei campi vettoriali considerati. I risultati provati in [16] si applicano in particolare agli operatori in forma di non-divergenza sopra considerati e vengono utilizzati nei lavori [11,18].

Il lavoro [13] migliora un precedente risultato in [5]: viene infatti fornita la prova della cosiddetta *Formula di Poisson&Jensen* per un sub-Laplaciano nel caso di domini limitati arbitrari, senza alcuna ipotesi di regolarità rispetto all'associato problema di Dirichlet. A tal fine occorre sviluppare in dettaglio una teoria della *Capacità* e della *Polarità* rispetto a sub-Laplaciani. Tale teoria è fornita in [13] in modo essenzialmente self-contained, a partire dai risultati in [5] (si veda anche [20]).

In [15], viene ulteriormente sviluppata la teoria della capacità per $\mathcal{L}$ già introdotta in [13] e, a partire da essa, si ottiene una teoria fine dell'*Energia* associata a $\mathcal{L}$. L'approccio seguito è nello spirito dei lavori [3, 5, 13], in cui si mostra come ripercorrere molti dei metodi classici di Teoria del Potenziale anche nel caso non euclideo dei gruppi stratificati. Come applicazione significativa della teoria dell'energia, viene esibita una prova semplice e diretta della *Quasi-Continuità* delle funzioni subarmoniche rispetto ad un sub-Laplaciano. Queste proprietà fini di regolarità sono di grande interesse nella letteratura recente.

Nel lavoro [17], denotando con $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su un gruppo stratificato $\mathbb{G}$, si studia il problema di Dirichlet per $\mathcal{L}$ con dati al bordo di classe L^p , su domini Ω che sono “contraibili” rispetto alle dilatazioni di $\mathbb{G}$. Una delle maggiori difficoltà che si è incontrata è la presenza di punti di bordo non regolari per l’usuale problema di Dirichlet relativo ad $\mathcal{L}$. Anche in questo articolo si segue un approccio potenziale-teoretico. I risultati principali vengono poi applicati allo studio di una opportuna nozione di “Spazi di Hardy” relativi ad $\mathcal{L}$.

Nel lavoro [19] (e nel seminario [44]), sono provati i seguenti risultati di Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani. Sia $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m X_i^2$ un sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ e si denoti con $\nabla_{\mathcal{L}} = (X_1, \dots, X_m)$ il gradiente intrinseco relativo a $\mathcal{L}$. Vengono analizzate alcune caratteristiche delle cosiddette funzioni $\mathcal{L}$ -gauge su $\mathbb{G}$, i.e., le funzioni omogenee d tali che $\mathcal{L}(d^\gamma) = 0$ in $\mathbb{G} \setminus \{0\}$, per qualche $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vengono altresì considerate le relazioni che intercorrono tra le funzioni $\mathcal{L}$ -gauge con: l’equazione $\mathcal{L}$ -Eikonale $|\nabla_{\mathcal{L}} u| = 1$ in $\mathbb{G}$; le Formule di Media per le funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche; la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$; i teoremi di tipo Bôcher di rimozione di singolarità per funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche non negative negli aperti “puntati” $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{x_0\}$.

Strutture più generali dei gruppi di Carnot vengono considerate nei lavori seguenti: i gruppi omogenei (si veda [21]) e i gruppi non nilpotenti su $\mathbb{R}^N$ che si possono costruire a partire da certi campi vettoriali di tipo Hörmander (si vedano [24, 25, 29]). Nell’articolo [21] (e nel seminario [45]), ho dimostrato, sui gruppi omogenei (nel senso introdotto da Folland&Stein), l’analogo della formula di Taylor (con resto integrale) e la cosiddetta *disuguaglianza di Taylor*, migliorando un risultato di Folland del 1982. Ho inoltre fornito alcune applicazioni della formula di Taylor. Una prima applicazione riguarda la L -armonicità dei polinomi di Taylor di una funzione L -armonica, quando L è un operatore omogeneo invariante a sinistra su un gruppo omogeneo (questo risultato si applica per ottenere le stime di Schauder relative ad L). Un’altra applicazione riguarda invece risultati di reale analiticità per funzioni le cui derivate (nel senso dell’algebra di Lie) verificano alcune stime di crescita.

Motivato dallo studio sistematico dei gruppi stratificati e dei loro sub-Laplaciani, in [9] fornisco un metodo costruttivo ed esplicito per costruire gruppi di Carnot a partire da un set di campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$ verificanti semplicissime ipotesi strutturali (risultati ancora più generali sono provati in [24, 25, 29]). Vengono inoltre esibiti svariati esempi non banali. Tale metodo costruttivo è basato sull’uso delle mappe esponenziali naturalmente associate a questi set di campi vettoriali e ad un utilizzo accurato della famosa formula di Campbell-Baker-Hausdorff. Di tale formula, nel caso di campi vettoriali stratificati, viene anche fornita una prova (si veda anche [26]).

Nei lavori [24, 25, 29], ritorno sul problema sollevato in [9]: più esplicitamente, se $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ è un operatore di Hörmander in $\mathbb{R}^N$, vengono fornite condizioni necessarie e sufficienti sugli X_j per l’esistenza di una struttura di gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, *non necessariamente nilpotente*, tale che $\mathcal{L}$ è invariante a sinistra su $\mathbb{G}$. Il caso di campi vettoriali omogenei è investigato in [25], ove queste condizioni necessarie e sufficienti prendono una forma ancora più semplice. Inoltre viene investigata l’esistenza di una soluzione fondamentale globale Γ per $\mathcal{L}$, fornendo altresì risultati che assicurano alcune buone proprietà di invarianza per traslazione a sinistra di Γ . Esempi di operatori $\mathcal{L}$ ai quali i citati risultati si applicano comprendono quelli che sono chiamati, nella letteratura recente, operatori di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck, di tipo Mumford e di tipo Ornstein-Uhlenbeck. Stiamo attualmente ottenendo condizioni necessarie e sufficienti minimali per rispondere alla questione di cui sopra, si veda il preprint [??].

I sopra citati operatori di evoluzione sono investigati in dettaglio nel lavoro [31]. Qui vengono forniti esempi di notevole importanza applicativa di operatori ai quali si può associare una struttura invariante come descritto in [29]: questi esempi vengono principalmente dall’esponenziale di matrici reali o complesse, e altresì da ODE lineari a coefficienti costanti. Si mostra inoltre come combinare assieme questi gruppi per ottenere nuove strutture e operatori, anch’essi di interesse applicativo (operatori evolutivi

di tipo Kolmogorov, operatori degeneri di tipo Ornstein-Uhlenbeck con coefficienti periodici dipendenti dal tempo.

La monografia [20] raccoglie ed approfondisce risultati introduttivi (ma anche di ricerca attuale) riguardanti lo studio dei gruppi di Carnot, con particolare cura nel fornire tutti quei risultati che vengono spesso bypassati in letteratura. Oltre ad una dettagliata introduzione sui gruppi omogenei e sui gruppi stratificati (contenente anche lo studio degli aspetti algebrici e geometrico-differenziali di tali strutture), vengono trattati anche aspetti analitici, quali lo studio della soluzione fondamentale dei sub-Laplaciani, le relative formule di media e la disuguaglianza di Harnack. Per mezzo di questi risultati e di alcuni di Teoria Astratta del Potenziale, viene poi sviluppata gran parte della Teoria del Potenziale per i sub-Laplaciani con particolare riguardo a: capacità, polarità, energia, lo studio del problema di Dirichlet nel senso di Perron-Wiener-Brelot, regolarità di punti di frontiera, formule di rappresentazione di tipo Riesz o Poisson-Jensen, il criterio di Wiener, singolarità isolate (teoremi di tipo Bôcher), lo studio della funzione di Green per aperti arbitrari, potenziali di misure, Principi del Massimo su aperti limitati e non, sottigliezza e topologia fine, ecc...

La monografia [27] (si veda anche l'estratto in [46]) esplora un risultato cruciale per comprendere background algebrico e geometrico-differenziale soggiacente ai gruppi di Lie (non necessariamente stratificati). Questa monografia è dedicata a uno dei più importanti e significativi risultati sui gruppi di Lie, cioè la formula che porta i nomi di Campbell, Baker, Hausdorff e Dynkin (che nel seguito ricorderemo brevemente come 'il Teorema di CBHD'). È possibile approcciare lo studio di questa formula e la sua dimostrazione sia con metodi di Algebra (strutture algebriche astratte, calcolo tensoriale, serie formali non commutative), sia di Analisi (teoria delle ODE), sia di Geometria Differenziale (gruppi di Lie e mappa esponenziale). Una esposizione unitaria e self-contained di tutti questi differenti approcci è contenuta nella monografia [27]. Sembra interessante osservare che uno dei primi a fornire una prova di un teorema di tipo CBHD per i cosiddetti gruppi continui di trasformazioni sia stato l'italiano Ernesto Pascal nel 1902 (prima, dunque, dello stesso Hausdorff): di questa indagine puramente storiografica mi sto occupando nell'imminente preprint [iv].

Di carattere storiografico è anche il lavoro [32]: qui viene fornita una esaustiva esposizione dei primi contributi al Teorema di CBHD, nel lasso temporale 1890–1950. Vengono riscoperti, investigati e confrontati i lavori di Schur, Poincaré, Pascal, oltre a quelli più noti di Campbell, Baker, Hausdorff, e Dynkin. Al fine di riportare pienamente alla luce i lavori originali, molti dettagli matematici vengono presentati. In particolare, viene riportata alla luce una serie di cinque articoli, ormai completamente dimenticati, di Ernesto Pascal (Lomb Ist Rend, 1901–1902), oggetto del citato imminente lavoro [iv].

Di alcuni problemi squisitamente algebrici legati al Teorema di CBHD, ci siamo occupati nel lavoro [28]. Qui viene dimostrato che il classico teorema di Poincaré, Birkhoff, Witt (PBW, in breve) e quello di CBHD possono essere dimostrati l'uno tramite l'altro. L'uso del Teorema di PBW è uno degli ingredienti classici per affrontare la prova di CBHD (risalente al trattato di Bourbaki). Invece, nel dimostrare la dipendenza di PBW da CBHD, si possono usare alcune idee in un lavoro di P. Cartier del 1956, lasciate parzialmente non dimostrate e che in [28] vengono riprese in dettaglio. In particolare, viene chiarito il ruolo essenziale delle algebre di Lie libere nel dimostrare l'interdipendenza dei Teoremi di PBW e CBHD.

Sempre relativamente allo studio del Teorema di CBHD, nel lavoro [26] viene nuovamente investigato il problema di fornire condizioni sufficienti affinché l'operatore di Hörmander $\sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ sia invariante a sinistra su un gruppo di Lie. In [26] si descrive il modo "esplicito" di costruire tale gruppo (non necessariamente nilpotente né omogeneo): lo strumento essenziale è appunto una formula di tipo CBHD relativa ad un problema di EDO naturalmente associato al sistema di campi vettoriali $\{X_0, \dots, X_m\}$. In questo articolo si fornisce una prova diretta di questa formula nel contesto delle EDO (che sembrava mancare in letteratura), senza invocare nessun risultato di teoria dei gruppi di Lie, né tutto il "macchinario"

algebrico astratto che c'è dietro la classica formula di CBHD. Vengono altresì forniti espliciti esempi di operatori di interesse applicativo a cui si applicano i nostri risultati.

Le mie investigazioni di Teoria del Potenziale sono continuate nei recentissimi articoli [33, 35, 36], ove vengono studiati operatori molto più generali dei sub-Laplaciani sui gruppi stratificati. In [35], viene fornita una piena caratterizzazione delle funzioni subarmoniche rispetto a operatori differenziali lineari del secondo ordine L con forma caratteristica non negativa, dotati di una soluzione fondamentale positiva Γ . Queste caratterizzazioni sono basate sull'uso di opportuni operatori di media integrali M_r sugli insiemi di livello di Γ . Vengono anche considerate caratterizzazioni asintotiche che estendono classici risultati di Blaschke, Privaloff, Radó, Beckenbach, Reade e Saks. Analizziamo anche la nozione di funzione subarmonica nel senso debole delle distribuzioni, e mostriamo come approssimare funzioni subarmoniche con funzioni subarmoniche C^∞ . Gli operatori considerati in [35] comprendono come casi molto particolari i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot.

Nell'articolo [33] si prosegue la strada tracciata in [35], considerando operatori C^∞ -ipoellittici L come sopra. Vengono studiati i seguenti problemi: la positività del nucleo associato a M_r (proviamo che esso è positivo su un insieme aperto denso in $\mathbb{R}^N$); il ruolo di M_r nella risoluzione del problema di Dirichlet omogeneo associato a L , nel senso di Perron-Wiener-Brelot; l'esistenza di un "inverso" del teorema del valor medio caratterizzante le palle sub-Riemanniane definite come insiemi di sopralivello di Γ . Quest'ultimo risultato estende un precedente teorema di Kuran [Bull. London Math. Soc. 1972]. Come risultati collaterali proviamo in modo molto semplice il Principio del Massimo Forte per L e una formula di tipo Poisson-Jensen. Attualmente, grazie ai risultati in [33], abbiamo studiato le famiglie normali di funzioni L -armoniche ed abbiamo ottenuto una estensione di un noto teorema di Montel proveniente dalla teoria delle funzioni olomorfe; si veda il preprint [37]. Nel preprint [36] viene fornita una caratterizzazione, per la classe di operatori in [35] (caratterizzazione nuova anche nel caso classico), delle funzioni L -subarmoniche u attraverso le proprietà di convessità delle medie $M_r(u)(x)$. Vengono poi estesi per gli operatori L i teoremi di rimozione di singolarità in [19].

Pubblicazioni a carattere divulgativo:

Per finire, i lavori [39, 40, 41] ripercorrono parte dell'esperienza da me svolta presso il Dipartimento di Matematica nel 2000, Anno Mondiale della Matematica. Infatti, in occasione delle celebrazioni del "World Mathematical Year 2000" e di *Bologna 2000*, ho collaborato all'organizzazione dell'evento "Matematica Arte e Tecnologia: da Escher alla Computer Graphics", organizzato dal Dipartimento di Matematica di Bologna. Tale evento prevedeva un ciclo di convegni, una mostra di quadri e un ciclo di film riguardanti il connubio esistente tra Matematica e Arte.

L'intento dell'evento (peraltro pienamente atteso) era quello di attrarre l'interesse del grande pubblico verso il mondo della Matematica, prendendo spunto dalle suggestioni dell'arte pittorica, cinematografica e della computer graphics. In particolare, la mostra di un centinaio di quadri originali del famoso pittore olandese M. C. Escher, allestita presso la Biblioteca Universitaria di Bologna (assieme ad alcune opere di O. Reutersvärd e di L. Saffaro) ha ispirato il catalogo da me curato con C. Valentini, in cui si descrive il forte impatto che l'evento ha avuto sul pubblico, soprattutto di giovani, incuriositi dalle inaspettate interazioni tra matematica, arte e tecnologia. A partire dai contributi forniti dai diversi studiosi che hanno collaborato all'evento "Matematica Arte e Tecnologia", Springer Italia e Springer-Verlag hanno realizzato le raccolte citate in [40, 41], in cui sono intervenuto assieme con C. Valentini.

Materiale didattico:

I lavori in preparazione [vi], [vii] e [viii] (disponibili online sulle pagine dei relativi Corsi di Studio o su richiesta dello studente) raccolgono il materiale didattico, esercizi e soluzioni, relativo alle lezioni da me tenute, rispettivamente per i corsi:

- *Analisi Armonica e Analisi Superiore 2* (Laurea Magistrale in Matematica, Bologna);
- *Istituzioni di Matematica 2*, per il secondo anno della Laurea Triennale in Scienze Ambientali dell'Università di Bologna (sede di Ravenna);
- *Attività Professionalizzanti*, per il terzo anno della Laurea Triennale in Matematica di Bologna.

Sito Web: Sito Web personale:

<http://www.dm.unibo.it/~bonfigli/>

Sito Web Docente presso il Portale dell'Ateneo di Bologna:

<http://www.unibo.it/docenti/andrea.bonfiglioli6>

E-mail: andrea.bonfiglioli6@unibo.it

Bologna, 30/08/2013.

(Dott. Andrea Bonfiglioli)²

²Il sottoscritto esprime il proprio consenso affinché i dati personali contenuti nel presente curriculum possano essere trattati, nel rispetto della Legge 675/96, per gli adempimenti connessi ad eventuali valutazioni comparative.

Allegati

Nelle pagine seguenti si trovano:

- Report didattici relativi alla rilevazione dei miei corsi a partire dall'A.A. in cui tali dati sono stati resi disponibili sul sito dell'Osservatorio Statistico dell'Università di Bologna. (Nel caso di corsi con un numero basso di studenti, i report non sono stati resi disponibili al docente per motivi di privacy.)