1. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

   Il dominio è tutto il campo reale. L'intersezione con l'asse delle ordinate

   è il punto $(0, 4)$. Calcoliamo l'intersezione con l'asse delle ascisse:

   $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$=0

   Quindi l'intersezione del grafico della funzione con l'asse delle ascisse è data dai punti $(1, 0), (2, 0), (-2, 0)$

   Limiti agli estremi del campo di esistenza

   $$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

   $$\lim_{x\to+\infty}(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

   Positivitá e negativitá

   $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

   $(x-1)(x-2)(x+2) > 0$

   primo fattore $x - 1 > 0$ $\quad x > 1$

   secondo fattore $x - 2 > 0$ $\quad x > 2$

   terzo fattore $x + 2 > 0$ $\quad x > -2$

   $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0 - 2 < x < 1$ oppure $x > 2$

   Determinazione degli asintoti

   Non esistono asintoti verticali perchè il campo di esistenza di f è il campo reale.

   Non esistono asintoti obliqui perchè la funzione è di terzo grado e quindi non puo' essere approssimata mediante una retta

   Determinazione della derivata prima

   $f'(x) = x^2 - 2x - 4$

   Per studiare la crescenza e decrescenza di f pongo la derivata prima maggiore di zero per trovare le zone ove la funzione è crescente

   $3x^2 - 2x - 4 > 0$

per $\quad x < \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3} \simeq -0.8685170918$ oppure $x > \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3} \simeq 1.535183758$

Ordinate del massimo relativo $f(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}) = (\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3})^3 - (\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3})^2 - 4(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}) + 4 = 26\frac{\sqrt{13}}{27} + \frac{70}{27} \simeq 6.064604931$

Ordinate del minimo relativo $f(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}) = (\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3})^3 - (\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3})^2 - 4(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}) + 4 = 26\frac{\sqrt{13}}{27} - \frac{70}{27} \simeq -0.8794197467$

Determinazione della derivata seconda

$f"(x) = 6x - 2$

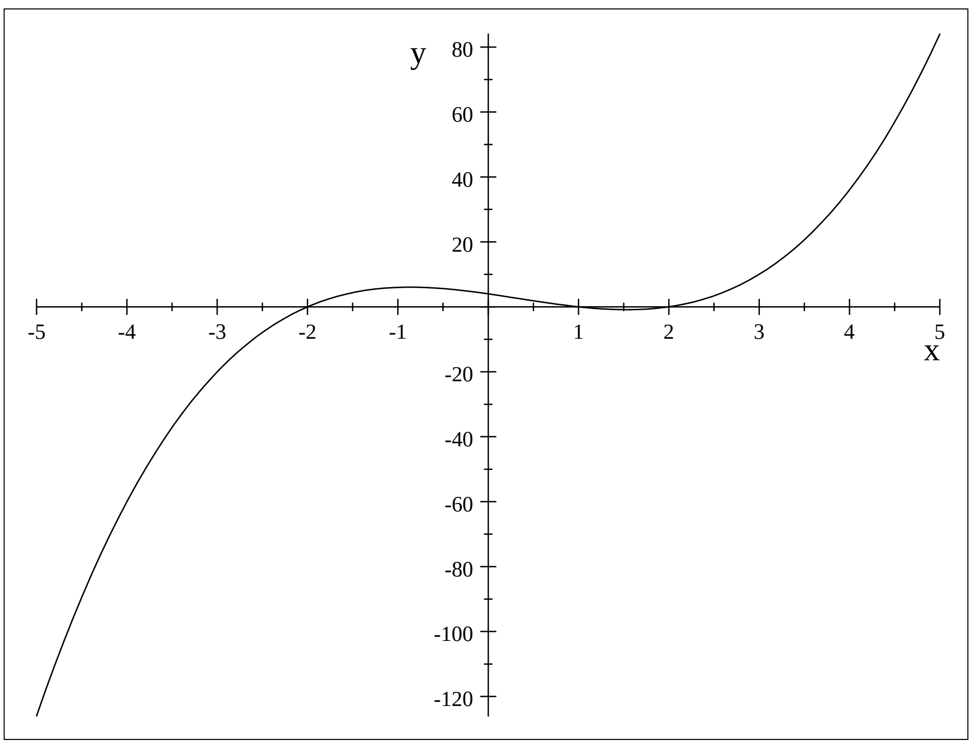
Determinazione della concavita', convessita' e flessi

$6x - 2 > 0$; $\qquad 6x > 2; \qquad x > \frac{2}{6}; \qquad x > \frac{1}{3}$

quindi

per $x > \frac{1}{3}$la concavita' è verso l'alto; per $x < \frac{1}{3}$ la concavita' è verso il basso; in $x = \frac{1}{3}$ c' è il flesso $F(\frac{1}{3}, \frac{70}{27})$

Grafico della funzione



2. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

Il dominio è costituito dai numeri reali per cui $x^2 - 1 \neq 0$, cioe' $x \neq \pm 1$. Quindi il dominio è: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ L'intersezione con l'asse delle ordinate è il punto $(0, -2)$. L'intersezione con l'asse delle ascisse è il punto $(-2, 0)$.

Positivitá e negativitá $\frac{x+2}{x^2-1} > 0$

numeratore $(x+2) > 0$ $x > -2$
denominatore $x^2 - 1 > 0$ $x < -1$oppure $x > 1$
$(x+2)/(x^2-1) > 0$ $-2 < x < -1$ oppure $x > 1$

Determinazione degli asintoti.

Limiti agli estremi del campo di esistenza

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Esiste dunque un asintoto orizzontale $y = 0$

$\lim_{x \to -1^+} (x+2)/(x^2-1) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^-} (x+2)/(x^2-1) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} (x+2)/(x^2-1) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^{+-}} (x+2)/(x^2-1) = +\infty$

Esistono pertanto, due asintoti verticali:

$x = -1$ e $x = 1$

Determinazione della derivata prima

$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}$

Per studiare la crescenza e decrescenza di f pongo la derivata prima maggiore di zero per trovare le zone ove la funzione è crescente

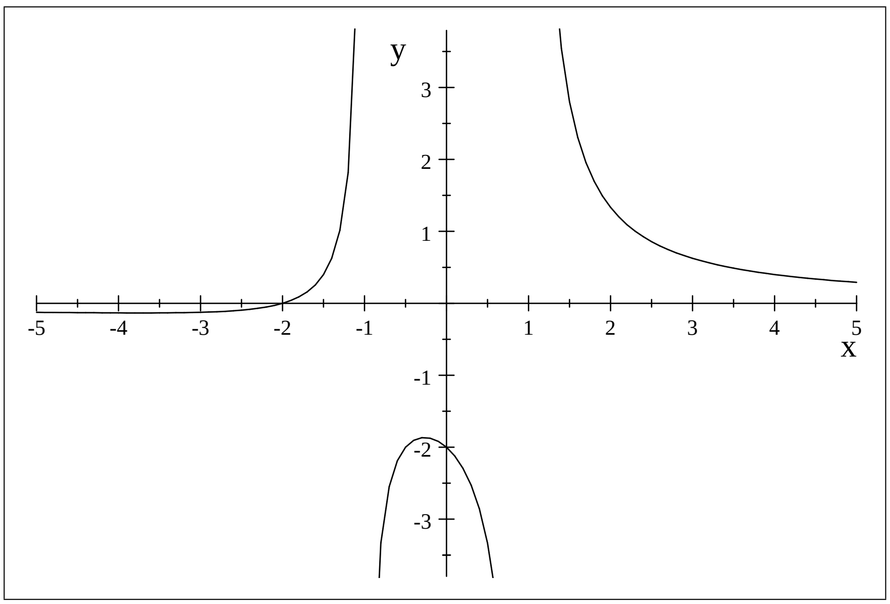
$-\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2} > 0$

per

$-\sqrt{3}-2 < x < \sqrt{3}-2$

Ordinate del massimo relativo $f(-\sqrt{3}-2) = (\frac{(-\sqrt{3}-2)+2}{(-\sqrt{3}-2)^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

Ordinate del minimo relativo $f(\sqrt{3}-2) = (\frac{(\sqrt{3}-2)+2}{(\sqrt{3}-2)^2-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$



3. $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2-4}$

   Il dominio è costituito dai numeri reali positivi (esistenza del logaritmo) e per cui $x^2 - 4 \neq 0$, cioe' $x \neq \pm 2$.

   Quindi il dominio è: $(0,2) \cup (2,+\infty)$

   L' intersezione con l'asse delle ascisse è il punto $(0,1)$.

   Positivitá e negativitá $\frac{x \ln x}{x^2-4} > 0$

   numeratore $\quad x \ln x > 0 \quad\quad x > 1$

   denominatore $x^2 - 4 > 0 \quad\quad x < -2$ oppure $x > 2$, (per il dominio della funzione) $x > 2$

   $\frac{x \ln x}{x^2-4} > 0 \quad\quad 0 < x < 1$ oppure $x > 2$

   Determinazione degli asintoti.

   Limiti agli estremi del campo di esistenza

   $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x \ln x}{x^2-4} = 0$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^2-4} = 0$

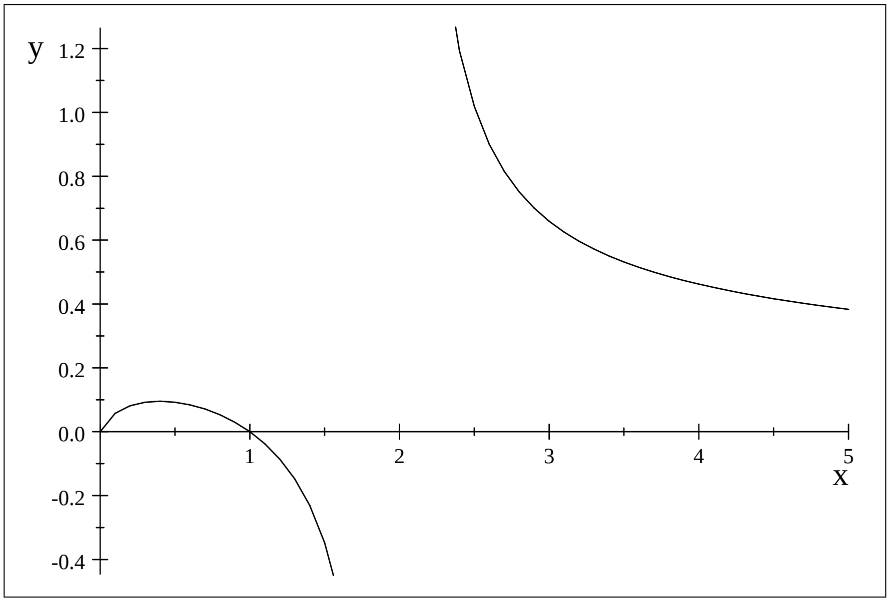
   Esiste dunque un asintoto orizzontale $y = 0$

   $\lim\limits_{x \to -2^{--}} \frac{x \ln x}{x^2-4} = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to -2^{+-}} \frac{x \ln x}{x^2-4} = +\infty$

   Esistono pertanto un asintoto verticali: $x = 2$

   $\frac{d}{dx}\left(\frac{x \ln x}{x^2-4}\right) = -\frac{1}{(x^2-4)^2}\left(4 \ln x + x^2 \ln x - x^2 + 4\right)$


y
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4
1
2
3
4
5
x