GEOMETRIA ANALITICA

EQUAZIONE DELLA RETTA

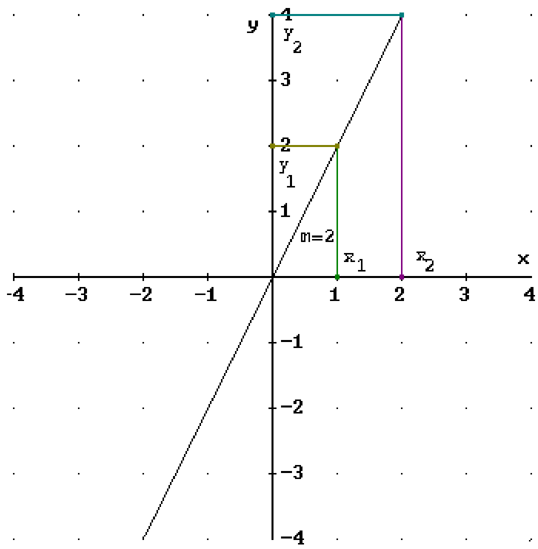
Teoria in sintesi

- Dati due punti A e B nel piano, essi individuano (univocamente) una retta.
- La retta è rappresentata da un'equazione di primo grado in due variabili:

  (*) $ax+by+c=0$ con a,b,c numeri reali
  che è detta *equazione generale* della retta.

  Tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione (*) cioè le soluzioni dell'equazione, sono i punti del piano appartenenti alla retta

- Nell'equazione (*) notate il diverso significato che assumono le lettere a,b,c (*parametri o costanti*) ed x,y (*variabili*)
- Ogni equazione del tipo : $y=mx+q$ rappresenta una retta (*equazione esplicita della retta*). m è detto *coefficiente angolare* , $m=-a/b$, mentre q è l'*ordinata all'origine* (l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y)
- Dati due punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x_2 \neq x_1$



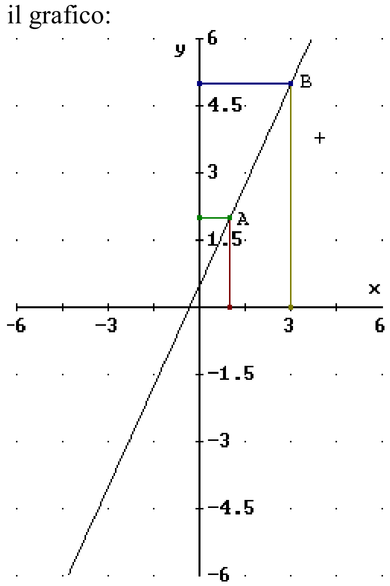
- Se m=0 l'equazione $y=q$ rappresenta una retta parallela all'asse x (che coincide con l'asse x nel caso $q=0$)
- Le rette parallele all'asse y non sono rappresentate nell'equazione in forma esplicita
- L'equazione: $y-y_0=m(x-x_0)$ è l'equazione di una *famiglia di rette di centro P* cioè rappresenta tutte le rette (tranne quella parallela all'asse y) che passano per il punto $P(x_0,y_0)$

Esempi

1.*Grafico della retta*

Tracciare nel piano cartesiano il grafico della retta: 3x-2y+1=0

- Cerchiamo due punti appartenenti alla retta, cioè due punti che siano soluzione dell'equazione data. Si sceglie un valore di x (ad es. x=1) e, sostituendo nell'equazione si trova il corrispondente valore di y (y=2)
- Ripetiamo l'operazione con un secondo valore di x e calcoliamo il corrispondente valore di y. x=3, y=5
- A questo punto tracciamo il grafico:



2.Stabilire quali dei seguenti punti appartengono alla retta: y=2x-1

- A(1,1).

  Appartiene alla retta data perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione si ottiene 1=2-1 e dunque A la soddisfa
- B(-2,3)

  Non appartiene perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione si ottiene 3=-4-1 e dunque B non la soddisfa

3.Scrivere l'equazione della retta passante per A(-3,1) e B(2,-2)

- $m = \frac{-2-1}{2+3} = \frac{-3}{5}$
- per calcolare q, sostituiamo il coefficiente angolare trovato e le coordinate di uno dei due punti dati nell'equazione y=mx+q : $-2 = \frac{-6}{5} + q$ da cui si ottiene q=-4/5
- la retta cercata è : y=(-3/5)x-4/5
- allo stesso risultato si poteva arrivare utilizzando la formula della retta passante per due punti (vedi appendice): $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x-x_2}$ che applicata nel nostro caso ci porta all'equazione.

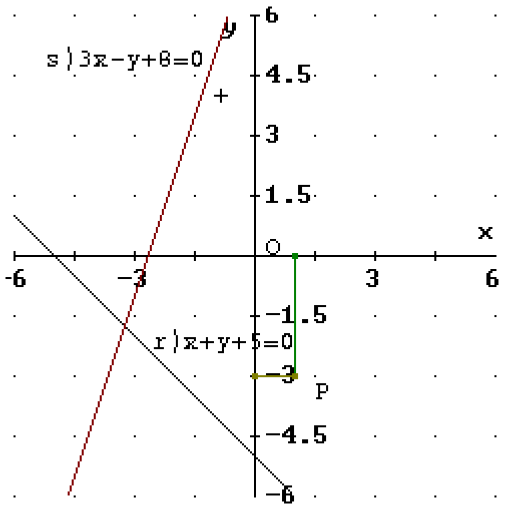
  $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x+3}{2+3}$, cioè 5y+3x+4=0

4.Dire se i punti O(0,0) e P(1,-3) stanno dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alle rette r)x+y+5=0 ed s)3x-y+8=0

- La retta r individua due semipiani : uno dato dall'insieme dei punti del piano per cui risulta x+y+5>0, l'altro dai punti per cui x+y+5<0 (la retta r è individuata dai punti per cui x+y+5=0)
- La retta s individua i due semipiani: 3x-y+8>0 e 3x-y+8<0
- Sostituendo le coordinate dei punti dati nelle disuguaglianze precedenti, si ottiene:

O(0,0): 0+0+5>0 vera
P(1,-3) 1-3+5>0vera
Dunque P ed O stanno dalla stessa parte rispetto alla retta r.
Analogamente per s si trova:
O(0,0) 0+0+8>0 vera
P(1,-3) 3+3+8>0 vera. Dunque P ed O stanno dalla stessa parte anche rispetto ad s

Verifichiamolo graficamente:

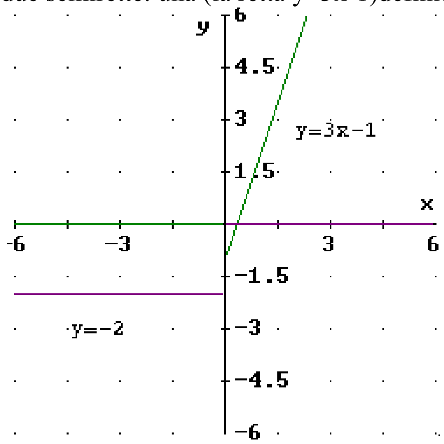


5.La funzione f(x) è data dalla legge:

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & per \quad x>0 \\ -2 & per \quad x<0 \end{cases}$$

Tracciarne il grafico

- Si tratta di disegnare due semirette: una (la retta y=3x-1)definita per x>0 , l'altra (la retta y=-2) per x<0



- La funzione è definita su tutto l'asse reale esclusa l'origine

6.Scrivere l'equazione della famiglia di rette di centro P(-2,4)

- L'equazione avrà la forma: $y-y_0=m(x-x_0)$. Nel nostro caso: y-4=m(x+2)
  Cioè y=mx+2m+4

Osservazione

Le infinite rette di equazione y=mx+q con m fissato, rappresentano al variare di q la famiglia delle rette parallele alla retta passante per l'origine di equazione y=mx.

Ad es. l'equazione y=4x+q rappresenta la famiglia di rette parallele alla retta per l'origine y=4x

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

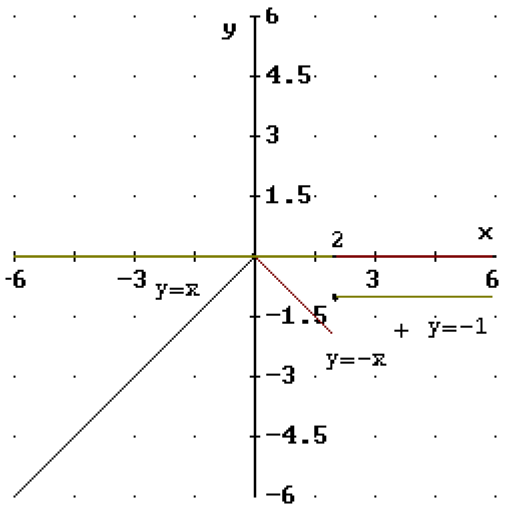
1) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A(-1,2) e B(3,-1)
2) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A(1,6) e B(1,23)

3) Tracciare il grafico della funzione: $f(x)=\begin{cases} x & per \quad x \le 0 \\ -x & per \quad 0 < x < 2 \\ -1 & per \quad x \ge 2 \end{cases}$

4) Scrivere l'equazione del fascio di rette di centro P(1/2,-7)
5) Riconoscere tra le seguenti equazioni quali rappresentano una famiglia di rette passanti per un punto e quali una famiglia di rette parallele ad una retta per l'origine:
   a. 3x+5y+k=0
   b. 2y+3mx-m=0
   c. –4y+hx+2=0
   d. kx+ky-2k+3=0 con k≠0

SOLUZIONI

1) 3x+4y-5=0
2) x=1
3)



4) y+7=m(x-1/2)
5) a . rette parallele a y=(-3/5)x
   b . 2y=-m(3x-1),famiglia di rette con centro P(1/3,0)
   c : 2(2y-1)=hx, famiglia di rette con centro P(0,1/2)
   d y=-x+2k-3, rette parallele a y=-x

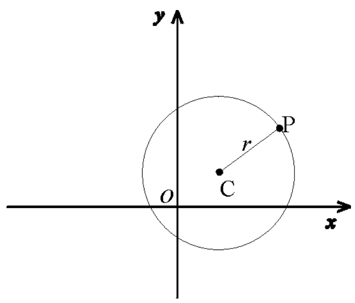
ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1.Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti A(1/3,2) e B(-2,-4/5) [6x-5y+8=0]
2.Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti A(0,0) e B(3,-2) [y=(-2/3)x]
3.Nel fascio di rette parallele alla retta 3x+2y=0, determinare l'equazione della retta che passa per P(1,-5) [3x+2y+7=0]
4.Scrivere l'equazione della famiglia di rette di centro A(-1,1) e determinare la retta passante per B(0,2) [x-y+2=0]

5.Dire se i punti O(0,0) e P(1,-3) stanno dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alle rette:
r)2x-y+5=0, s) x-3y-5=0, t) 10x+24y+15=0 [dalla stessa parte solo rispetto ad r]

LA CIRCONFERENZA

- La *circonferenza* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto *C*, detto *centro*.
- Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse.
- La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il *raggio* della circonferenza.



- Note le *coordinate del centro C ($\alpha;\beta$)* e la *misura r del raggio*, *l'equazione della circonferenza* è allora

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(equazione canonica)}$$

- Svolgendo i calcoli nell'equazione precedente si ottiene:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad (*)$$

dove $a=-2\alpha$, $b=-2\beta$, $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$ (e dunque $r^2=(a^2/4)+(b^2/4)-c$)

- Assegnata un'equazione di secondo grado in cui i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali tra loro, non è detto che essa rappresenti sempre una circonferenza. Infatti l'equazione (*) rappresenta una circonferenza solo se $(a^2/4)+(b^2/4)-c>0$ cioè se il quadrato del raggio è positivo

__Esempi__

1.Determinare l'equazione della circonferenza di centro C(2,-1) e raggio r=3

- Utilizzando l'equazione canonica della circonferenza, possiamo scrivere: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$, che è l'equazione richiesta

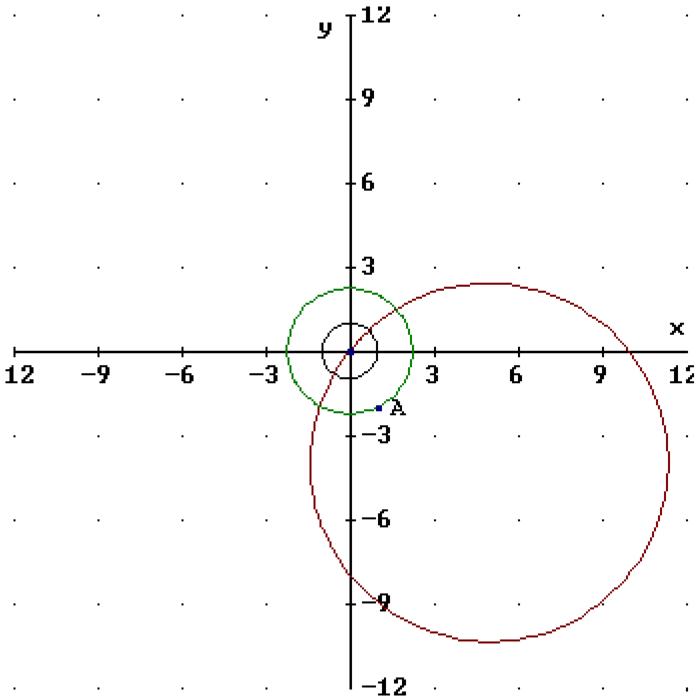
2.Dire se le seguenti equazioni rappresentano o no delle circonferenze ed in caso affermativo determinare centro e raggio:

- $x^2+y^2-8x+6y=0$. Calcoliamo il centro C(4,-3) ed il raggio $r^2=16+9=25>0$ e quindi l'equazione data è una circonferenza di centro C e raggio 5
- $x^2+y^2+10x-4y+29=0$ Calcoliamo il centro C(-5,2) ed il raggio $r^2= 25+4-29=0$ e quindi l'equazione data non rappresenta una circonferenza
- $x^2+y^2-2x+y+9=0$ Calcoliamo il centro C(1,-1/2) ed il raggio $r^2=1+1/4-9<0$ e quindi non è una circonferenza
- $2x^2+3y^2-2x+3y-1=0$. Non è una circonferenza perché i coefficienti di x^2 e di y^2 non sono uguali
- $4x^2+4y^2+25y=0$. Per poter calcolare il centro ed il raggio dividiamo l'equazione per 4 ed otteniamo: $x^2+y^2+(25/4)y=0$ da cui C(-25/8,0) ed $r^2=(-25/8)^2$ cioè r=25/8

3.Stabilire se il punto A(1,-2) è interno o esterno alle circonferenze:

- $x^2+y^2=1$. Il punto A è esterno alla circonferenza data se $x^2_1+y^2_1>1$, interno se $x^2_1+y^2_1<1$ quando sostituiamo al posto di x_1 ed y_1 le coordinate di A. Nel nostro caso risulta 1+4>1 e dunque A è esterno alla circonferenza
- $x^2+y^2-10x+8y=0$. Come nel caso precedente, sostituendo le coordinate di A nella circonferenza, otteniamo 1+4-10-16<0 e dunque il punto è interno alla circonferenza data
- $x^2+y^2=5$. In questo caso : 1+4=5 e quindi il punto sta sulla circonferenza.

Graficamente i tre casi precedenti si rappresentano:



TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1.Stabilire quali delle seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze:

a. $x^2+y^2-2x+4y+7=0$
b. $2x^2+2y^2-x+5y-1=0$
c. $x^2+y^2-2x=0$

2.Determinare la circonferenza avente centro C(-1,-1/2) ed r=3/2

3.Stabilire se il punto A(1,-2) appartiene oppure no alla circonferenza $x^2+y^2+2x-4y+1=0$. In caso negativo stabilire se è interno o esterno

SOLUZIONI

1.

a. no.
b. C(1/4,-5/4) ed r=√34/4
c. C(1,0) ed r=1

2. $x^2+y^2+2x+y-1=0$

3.E' esterno

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. per quali valori di h parametro reale, l'equazione $x^2+y^2-2x+hy+h=0$ rappresenta una circonferenza? Scelto uno di tali valori, determinare centro e raggio
   [h≠2; per h=2 C(1,-1) e raggio nullo]
2. determinare la circonferenza avente come diametro il segmento AB con A(2,-6) e B(-4,2).
   (suggerimento: il punto medio del segmento AB è il centro della circonferenza ed il raggio è dato dal segmento CA o dal segmento CB)
   [$x^2+y^2+2x+4y-20=0$]
3. scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine ed ha centro in
   C(6,-8) [$(x-6)^2+(y+8)^2=100$]

APPENDICE

Riportiamo di seguito alcune formule di geometria analitica che può essere utile ricordare.

LA RETTA

1.*Rette particolari*

- Se a=0 la retta è parallela all'asse x ed ha equazione : by+c=0 (retta orizzontale)
- Se b=0 la retta è parallela all'asse y ed ha equazione : ax+c=0(retta verticale)
- Se c=0 la retta passa per l'origine

2.*Condizione di allineamento di tre punti*. Dati tre punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ che abbiano ascisse diverse, sono allineati se e solo se: $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

3.*Retta per due punti* . Dati due punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ ed $y_1 \neq y_2$, allora la retta che passa per A e B ha equazione: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

4.*Equazioni delle bisettrici degli assi cartesiani*. Bisettrice del primo e terzo quadrante : y=x
Bisettrice del secondo e quarto quadrante: y=-x

5.*Rette parallele*. Due rette di equazioni y=mx+q e y=m'x+q' sono parallele se m=m'. Se le rette sono nella forma ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0, sono parallele se ab'=a'b

6.*Rette perpendicolari*. . Due rette di equazioni y=mx+q e y=m'x+q' sono perpendicolari se mm'=-1 Se le rette sono nella forma ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0, sono perpendicolari se aa'+bb'=0

7.*Distanza di un punto da una retta*. La distanza di un punto $P(x_0,y_0)$ dalla retta r è data da:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{oppure} \quad d=\frac{|y_0-mx_0-q|}{\sqrt{m^2+1}}$$

a seconda che la retta sia scritta in forma implicita o in forma esplicita

LA CIRCONFERENZA

1.*Si segnalano i seguenti casi particolari dell'equazione* $x^2+y^2+ax+by+c=0$

a=0, il centro appartiene all'asse y:
b=0, il centro appartiene all'asse x;
c=0, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

2.*Determinazione dell'equazione della circonferenza*. Per determinare l'equazione di una circonferenza è necessario determinare i tre parametri (*a, b, c*) dell'equazione generale di una circonferenza.
Ad esempio citiamo i seguenti casi:

- sono note le coordinate del centro e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;
- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

Vediamo un esempio per chiarire le idee.

Esempio

Determinare l'equazione della circonferenza che passa per A(0,3), B(-4,1), C(1,1).
Si parte dall'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e si impone che sia soddisfatta dalle coordinate dei tre punti dati. Si ottiene allora il sistema: $\begin{cases} 9+3b+c=0 \\ 16+1-4a+b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \end{cases}$ che come soluzioni ha i valori $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

la circonferenza ha equazione. $x^2+y^2+3x+-2y-3=0$

3.*Rette secanti, tangenti* o *esterne ad una circonferenza*
Dato il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella della retta

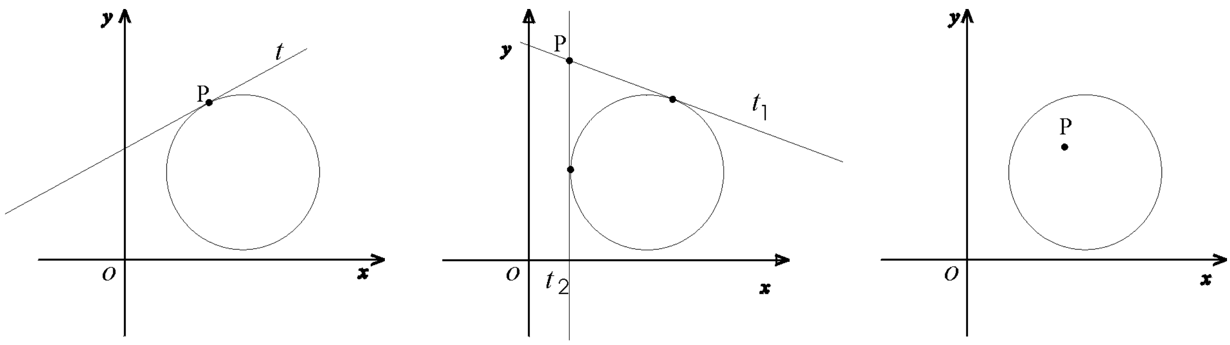
$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema (ricavando una delle due variabili in funzione dell'altra nella seconda equazione), abbiamo allora le tre possibilità alternative:

- $\Delta > 0$, la retta è *secante*;
- $\Delta = 0$, la retta è *tangente*;
- $\Delta < 0$, la retta è *esterna*.

Dato un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, nella ricerca delle *tangenti* condotte dal un punto P alla circonferenza, si possono presentare tre casi.

- *P* è esterno alla circonferenza, le *rette per P tangenti alla circonferenza sono due*;
- *P* appartiene alla circonferenza, la *retta tangente è una sola*;
- *P* è interno alla circonferenza, *non esistono rette tangenti* uscenti da *P*.



Per determinare le equazioni delle eventuali *rette tangenti*, si possono seguire due metodi.

I METODO

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e la circonferenza:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = y_0 + m(x - x_0) \\ x^2 + (y_0 + m(x - x_0))^2 + \ldots \end{cases}$$

- con il metodo di sostituzione si ottiene quindi un'equazione di secondo grado nella variabile x;
- si impone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$;
- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m;
  se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due e il punto P è esterno alla circonferenza;
  se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto P appartiene alla circonferenza;
  se $m_1, m_2 \notin \mathbf{R}$, non esistono rette tangenti e il punto P è interno alla circonferenza;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

N.B.: E' sempre conveniente controllare graficamente i risultati ottenuti…!

Esempio

Scrivere l'equazione delle rette passanti per *P(0,-4)* e tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.
L'equazione della retta generica passante per P è:

$$y - (-4) = m(x - 0)$$

intersecando con la circonferenza otteniamo

$$\begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2(1 + m^2) - 8mx + 12 = 0 \end{cases}$$

imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ottiene

$$\frac{\Delta}{4} = (4m)^2 - 12(1 + m^2) = 0$$

che ci dà coefficiente angolare delle rette tangenti $m = \pm\sqrt{3}$.

Le due rette quindi sono:

$$y = \pm\sqrt{3}x - 4$$

II METODO

- si determinano le coordinate del centro C e del raggio r della circonferenza;
- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

cioè

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0;$$

- si applica la formula della distanza fra le rette e il centro *C*;
- si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in *m*;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Attenzione: Se il punto *P* appartiene alla circonferenza, allora la retta tangente è semplicemente la retta per *P* perpendicolare a *PC*.

4.*Intersezione tra due circonferenze*

Due circonferenze possono essere *secanti* in due punti, *tangenti* in uno stesso punto (esternamente o internamente), *una interna all'altra, concentriche o esterne.*

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

E' conveniente risolvere il sistema con il metodo di riduzione.
Sottraendo le due equazioni, si ottiene infatti l'equazione di primo grado

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

che *è l'asse radicale*, nella quale si potrà ricavare *x* in funzione di *y* (per esempio) e sostituirla poi in una delle due equazioni della circonferenza.