Potenze reali, esponenziali e logaritmi

Lezione per Studenti di Agraria
Università di Bologna

Potenza ad esponente intero positivo

Assegnati un numero reale a ed un numero naturale n, si definisce potenza di base a ed esponente n il prodotto di n fattori uguali ad a:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot$ (n volte)

Per convenzione si pone $a^0 = 1$.

Ad esempio

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
$5^0 = 1$

Potenza ad esponente intero negativo

Assegnati un numero reale a ed un numero naturale n, si definisce potenza di base a ed esponente $-n$:

$$a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}$$

Ad esempio:

$5^{(-4)} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

Potenza ad esponente razionale positivo

Assegnati un numero reale a non negativo e due numeri m e n interi positivi, si definisce potenza di base a ed esponente $\frac{m}{n}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ad esempio

$4^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{4^2} = \sqrt[7]{16}$

Potenza ad esponente razionale negativo

Assegnati un numero reale a non negativo e due numeri m e n interi positivi, si definisce potenza di base a ed esponente $-\frac{m}{n}$:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Ad esempio

$2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Potenza ad esponente irrazionale

Ricordiamo che un numero reale x è definito come un numero con infinite cifre decimali; pertanto esso è individuato da due classi di numeri razionali, separate ed indefinitamente ravvicinate, che rappresentano rispettivamente successive approssimazioni, per difetto e per eccesso, del numero stesso. Per esempio, il numero $\sqrt{2}$ puó essere individuato dalle due successioni:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 1,4 & 1,41 & 1,414 & 1,4142 & \dots \\ 2 & 1,5 & 1,42 & 1,415 & 1,4143 & \dots \end{array}$$

Perció la potenza $a^{\sqrt{2}}(a > 0)$ è definita dalle due successioni:

$$\begin{array}{llllll} a^1 & a^{1,4} & a^{1,41} & a^{1,414} & a^{1,4142} & \dots \\ a^2 & a^{1,5} & a^{1,42} & a^{1,415} & a^{1,4143} & \dots \end{array}$$

Ad esempio, consideriamo la potenza $3^{\sqrt{2}}$ è definita dalle due successioni:

$$\begin{array}{llllll} 3^1 & 3^{1,4} & 3^{1,41} & 3^{1,414} & 3^{1,4142} & \dots \\ 3^2 & 3^{1,5} & 3^{1,42} & 3^{1,415} & 3^{1,4143} & \dots \end{array}$$

e, arrotondando gli elementi delle due successione, la potenza è univocamente determinata come elemento separatore dalle classi:

$$\begin{array}{llllll} 3 & 4.6555 & 4.7070 & 4.7277 & 4.7287 & \dots \\ 9 & 5.1962 & 4.7590 & 4.7329 & 4.7293 & \dots : \end{array}$$

Quindi:
$3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$
$4,65 < 3^{\sqrt{2}} < 4,70$
$4,72 < 3^{\sqrt{2}} < 4,75$
$4,728 < 3^{\sqrt{2}} < 4,729$
$\dots\dots$
Dunque, le prime cifre della potenza $3^{\sqrt{2}}$ sono $4,72$.

Consideriamo ora la potenza , avente come base il numero naturale 2 ed esponente irrazionale
Il numero è un numero irrazionale $\sqrt{3}$, individuato dalle due successioni:

$1 \qquad 1,7 \qquad 1,73 \qquad 1,732 \qquad \ldots$

$2 \qquad 1,8 \qquad 1,74 \qquad 1,733 \qquad \ldots$

La potenza $2^{\sqrt{3}}$, risulta definita dalle successioni:

$2^1 \qquad 2^{1,7} \qquad 2^{1,73} \qquad 2^{1,732} \qquad \ldots$

$2^2 \qquad 2^{1,8} \qquad 2^{1,74} \qquad 2^{1,733} \qquad \ldots$

arrotondando le prime per difetto e le seconde per eccesso, la potenza è univocamente determinata come elemento separatore della nuova coppia di classi:

$2 \quad 3,249 \quad 3,3173 \quad 3,3219 \quad \ldots$

$4 \quad 3,4822 \quad 3,3404 \quad 3,3242 \quad \ldots$

Ossia:

$2 < 2^{\sqrt{3}} < 4$
$3,249 < 2^{\sqrt{3}} < 3,4822$
$3,3173 < 2^{\sqrt{3}} < 3,3404$
$3,3219 < 2^{\sqrt{3}} < 3,3242$
$\ldots\ldots$

Dunque, tali classi definiscono la potenza $2^{\sqrt{3}}$. che ha come come approssimazione ai centesimi $3,32$.

Proprietà delle potenze

Le proprietà delle potenze studiate alle scuole medie per le potenze ad esponente intero positivo, continuano a valere per qualsiasi potenza. Cioè valgono le seguenti le proprietà:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $0 < a < b \Rightarrow a^x < b^x$
4. $x < y,\ a > 1 \Rightarrow a^x < a^y$
5. $x < y, 0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y$

Definizione di Logaritmo

Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ l'esponente x da dare ad a per ottenere b.

Definizione di Logaritmo

Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ l'esponente x da dare ad a per ottenere b.
Pertanto le seguenti relazioni

$$x = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^x = b$$

sono equivalenti.

Definizione di Logaritmo

Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ l'esponente x da dare ad a per ottenere b.
Pertanto le seguenti relazioni

$$x = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^x = b$$

sono equivalenti.
I numeri a e b devono essere positivi in quanto

- a è la base della della potenza a^x
- $b = a^x$ quindi positivo.

Definizione di Logaritmo

Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ l'esponente x da dare ad a per ottenere b.
Pertanto le seguenti relazioni

$$x = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^x = b$$

sono equivalenti.
I numeri a e b devono essere positivi in quanto

- a è la base della della potenza a^x
- $b = a^x$ quindi positivo.

Dalla definizione di logaritmo seguono le due uguaglianze:

$$\log_a a^b = b \qquad \text{e} \qquad a^{\log_a b} = b$$

Definizione di Logaritmo

Il logaritmo in base $a > 0$ di un numero $b > 0$ l'esponente x da dare ad a per ottenere b.
Pertanto le seguenti relazioni

$$x = \log_a b \qquad \text{e} \qquad a^x = b$$

sono equivalenti.
I numeri a e b devono essere positivi in quanto

- a è la base della della potenza a^x
- $b = a^x$ quindi positivo.

Dalla definizione di logaritmo seguono le due uguaglianze:

$$\log_a a^b = b \qquad \text{e} \qquad a^{\log_a b} = b$$

Si osservi inoltre che

$$log_a a = 1 \qquad \text{e} \qquad \log_a 1 = 0.$$

Proprietà del Logaritmo

1. Logaritmo del prodotto

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori

Proprietà del Logaritmo

1. Logaritmo del prodotto

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori

2. Logaritmo della potenza

$$\log_a b^x = x log_a b$$

Il logaritmo della potenza di un numero è uguale dell'esponente di tale potenza per il logaritmo della base

Conseguenze

1. Logarittmo del rapporto

$$\log_a(b/c) = \log_a bc^{-1} = \log_a b - \log_a c$$

   Il logaritmo del rapporto di due o pi numeri è uguale al logaritmo del numeratore meno il logaritmo del denominatore.

2. Cambiamento di base

$$\log_c b = \frac{log_a b}{log_a c}$$

   Noto il valore di un logaritmo in una base, è semplice calcolarne il valore in un'altra base (spesso le calcolatrici danno il logaritmo solo in basi 10 ed e).

3. $$\log_a b = \frac{log_b b}{log_b a} = \frac{1}{log_b a}$$

Esempi

$$2^3 = 8 \quad \text{è equivalente a} \log_2 8 = 3$$

$$10^4 = 10{\cdot}000 \quad \text{è equivalente a } \log_{10} 10{\cdot}000 = 4$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2$$

$$\log_3 \sqrt[5]{3} = \log_3 3^{\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}$$