

DERIVATE

Il concetto di derivata di una funzione, è scaturito dal celebre problema della ricerca delle tangenti ad una curva in un suo punto, che ha lungamente impegnato i matematici prima di Newton e Leibnitz.

Una funzione è rappresentata sul piano cartesiano dal suo grafico . Anche una retta è un tipo particolare di funzione che ha *pendenza* costante: proprio la pendenza della retta o suo coefficiente angolare.

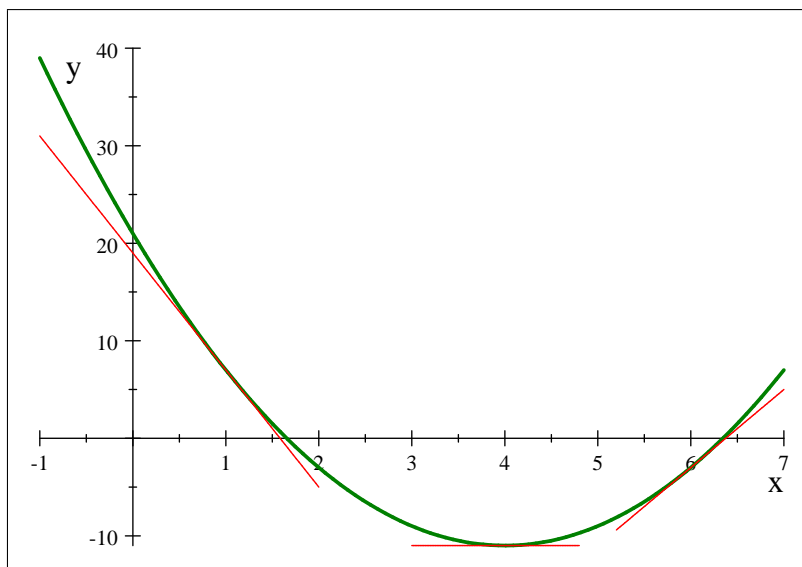
Il grafico di una funzione qualunque, invece, ha in generale, punto per punto, una pendenza diversa.

La definizione di pendenza in matematica è analoga a quella utilizzata nei cartelli stradali. Una pendenza del 10% ha il seguente significato geometrico: ci si alza di 10 metri mentre in orizzontale ci si sposta di 100 metri.

Se il cateto verticale (dislivello) fosse di 100 metri come quello orizzontale, la pendenza sarebbe del 100%,ovvero uguale ad 1, e corrisponderebbe ad un angolo di 45° :

La pendenza della curva in un punto P è la pendenza della retta tangente alla curva tracciata nel medesimo punto P .

Punto per punto, la pendenza in generale è diversa:



Nel punto del grafico di ascissa 1, la pendenza è negativa, in quello di ascissa 5, la pendenza è positiva, mentre in quello di ascissa 4, la pendenza è nulla.

Arriviamo ora alla definizione di derivata attraverso il concetto di rapporto incrementale.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita su $[a, b]$ e sia x_0 un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Se consideriamo il punto incrementato $x_0 + h$ sempre nell'intervallo $[a, b]$, si dice che si è dato alla variabile x l'incremento (positivo o negativo) h .

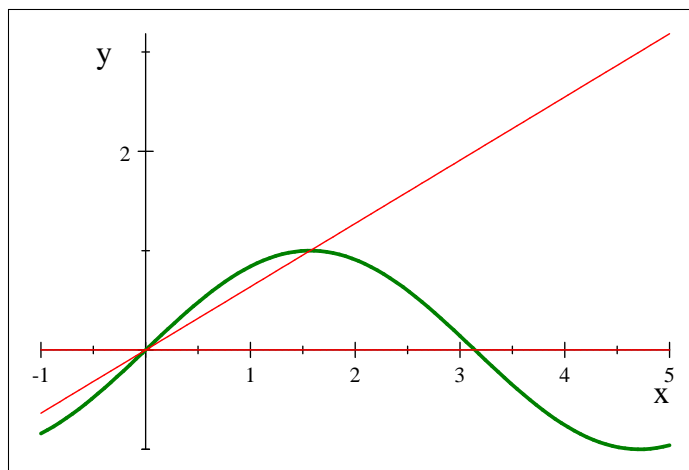
La differenza $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, si chiama rapporto incrementale della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h . Questo rapporto una volta fissato x_0 , varia al variare di h , cioè è una funzione della variabile h definita per i valori di $h \neq 0$, quando il punto $x_0 + h$ appartiene all'intervallo $[a, b]$.

Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta passante per i punti del grafico della funzione corrispondenti ad x_0 e ad $x_0 + h$, cioè la retta secante al grafico della funzione, ovvero, la tangente dell'angolo che forma la suddetta retta con l'asse delle ascisse.

Il rapporto incrementale ci dà un'informazione sulla crescita o sulla decrescita di questa funzione ed in particolare ci dà un'indicazione su quanto velocemente questa è avvenuta.

Consideriamo, ad esempio la funzione $f(x) = \sin(x)$ nel punto $x_0 = 0$, $h = \frac{\pi}{2}$, allora il rapporto incrementale è: $\frac{\sin(0+\frac{\pi}{2})-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{2}{\pi}$.

Sia ora $x_0 = 0$, $h = \pi$, allora il rapporto incrementale è: $\frac{\sin(0+\pi)-\sin 0}{\pi-0} = 0$



Il rapporto incrementale ci dice quanto una funzione cresce o decresce in un intervallo.

La derivata ci dice come la funzione cresce o decresce istantaneamente. Grazie al concetto di limite possiamo quindi introdurre il concetto di derivata, che ci permette di avere un'informazione sul tasso di crescita "istantaneo" della funzione.

Definizione Si chiama *derivata* della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale al tendere a 0 dell'incremento h .

La derivata si indica generalmente con $f'(x_0)$ ed è quindi così definita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

una definizione equivalente è la seguente:

$$f'(x_0) =: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se tale limite esiste ed è un numero reale, la funzione si dice derivabile in x_0 .

La derivata si indica con $f'(x_0)$ ed anche con $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Una funzione si dice derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio.

La derivata di una funzione in punto di ascissa x_0 , rappresenta quindi la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta tangente al grafico della funzione, forma con l'asse delle ascisse.

L'equazione della retta tangente della funzione $f(x)$ nel punto x_0 (in cui f è derivabile) è quindi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

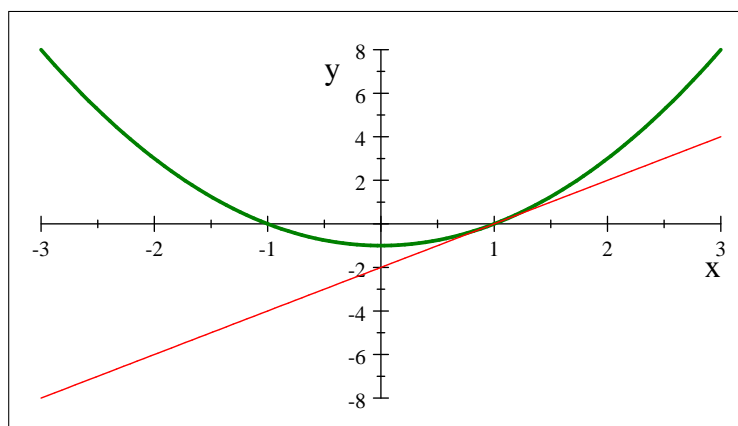
Esempi

1. Calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = x^2 - 1$ nel punto di ascissa 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 - (1^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Questo significa che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 1$ nel punto di ascissa 1 ha un coefficiente angolare pari a 2.

Quindi la retta tangente ha equazione $y - f(1) = 2(x - 1)$, ossia $y = 2x - 2$



2. Supponiamo che la posizione di un oggetto dopo un tempo t sia data dalla seguente funzione: $f(t) = \frac{t}{t+1}$

Per $t = 10$, l'oggetto si muove in avanti o indietro e con che velocità?

Dobbiamo calcolare la velocità dell'oggetto al tempo $t = 10$, cioè il seguente

$$\text{limite: } \lim_{t \rightarrow 10} \frac{\frac{t}{t+1} - \frac{10}{10+1}}{t-10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{\frac{t}{t+1} - \frac{10}{11}}{t-10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{1}{11t+11} = \frac{1}{121}$$

Dunque l'oggetto si sposta in avanti con una velocità pari a $\frac{1}{121}$.

3. La funzione $f(x) = |x|$ è derivabile in tutti i punti non nulli di \mathbb{R} , mentre non è derivabile nel punto 0.

Supponiamo $x_0 > 0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Se $x_0 < 0$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1$$

$$\text{Se } x_0 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Possiamo concludere che per $x_0 = 0$ la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile, anche se è ivi continua.

Un importante teorema mette in relazione la derivabilità di una funzione con la sua continuità affermando che:

Teorema *Se una funzione è derivabile nel punto x_0 , allora è necessariamente continua in tale punto.*

L'ultimo esempio : $f(x) = |x|$ mostra che l'inverso del teorema non è vero; cioè: se una funzione è continua in un punto x_0 , non è detto che sia derivabile in tale punto, mentre il teorema ci assicura che se una funzione è discontinua in un punto, non può essere derivabile in quel punto.

1 Funzione derivata

Si consideri una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile .

Alla funzione f si può associare la funzione derivata

$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($\frac{df}{dx} : I \rightarrow \mathbb{R}$) cioè la funzione che ad ogni punto di I associa la derivata in quel punto.

La derivata della funzione $f(x)$ si indica con $f'(x)$ o $\frac{df}{dx}$. Viene chiamata derivata prima di f .

Naturalmente una volta ottenuta la derivata prima di una funzione, questa può essere ulteriormente derivabile, quando questa derivata esiste, si chiama derivata seconda di f , si indica con $f''(x)$ o $\frac{d^2f}{dx^2}$.

A questo punto in modo analogo si possono avere le derivate di ordine successivo, terza, quarta, ecc

Daremo ora le formule che servono al calcolo delle derivate.

Dalle proprietà sui limiti si ha immediatamente che se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili,

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(cf)' = cf' \quad \text{dove } c \text{ è un numero reale.}$$

Daremo ora le formule che servono al calcolo delle derivate.

Derivata della funzione potenza

$$f(x) = x^a \qquad f'(x) = ax^{a-1}.$$

La formula vale per tutte le potenze.

Dimostriamo la formula nel caso $a = 2$, quindi per la funzione $f(x) = x^2$

Consideriamo il limite del rapporto incrementale per la funzione $f(x) = x^2$ in un punto x_0 generico.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

Possiamo concludere che la derivata di $f(x) = x^2$ è la funzione $f'(x) = 2x$, che è proprio il caso particolare della formula data nel caso $a = 2$.

Se consideriamo il caso $a = 0$, la funzione potenza coincide con la funzione costante di valore 1.

Dimostriamo che la derivata di ogni funzione costante $f(x) = c$ è la funzione nulla.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0$$

Si osservi che la funzione potenza non è sempre derivabile in tutti i punti, il problema si pone nel punto 0, infatti per esempio la funzione $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

ha come derivata $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ che non è definita nel punto 0 ; il calcolo del limite del rapporto incrementale dà ∞ .

Stesso risultato si ha per le funzioni radice di qualunque indice.

Siamo ora in grado di calcolare le derivate di alcune funzioni , quando esse esistono.

Esempi Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = 2x^{100} - 3x^{15} - 3x + 42$
 $f'(x) = 2 \cdot 100x^{100-1} - 3 \cdot 15x^{15-1} - 3x^{1-1} + 0 = 200x^{99} - 45x^{14} - 3$
2. $g(t) = 6t^7 - 5t^{-4}$
 $g'(t) = 6 \cdot 7t^{7-1} - 5 \cdot (-4)t^{-4-1} = 42t^6 + 20t^{-5} \quad (t \neq 0)$
3. $h(z) = 8z^3 - \frac{3}{z^4} = 8z^3 - 3z^{-4} (z \neq 0)$
 $h'(z) = 3 \cdot 8z^{3-1} - 3 \cdot (-4)z^{-4-1} = 24z^2 + \frac{12}{z^5} (z \neq 0)$
4. $k(x) = \sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} = x^{\frac{1}{2}} + 9x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{5}}$
 $k'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 9 \cdot (\frac{1}{3})x^{\frac{1}{3}-1} + 2 \cdot (-\frac{2}{5})x^{-\frac{2}{5}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{4}{5x^{\frac{7}{5}}} (x \neq 0)$
5. $u(x) = \sqrt[3]{x}(3x - x^3) = x^{\frac{1}{3}}(3x - x^3) = 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}$
 $u'(x) = 3 \cdot \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} - \frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1} = 4\sqrt[3]{x} - \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}} = 4\sqrt[3]{x} - \frac{10}{3}x^2\sqrt[3]{x}$
6. $v(t) = \frac{2t^6 - t^3 + 4}{t^2} = \frac{-t^3 + 2t^6 + 4}{t^2} = 2t^4 - t + \frac{4}{t^2} = 2t^4 - t + 4t^{-2}$
 $v'(t) = 2 \cdot 4t^{4-1} - 1 + 4 \cdot (-2)t^{-2-1} = 8t^3 - 1 - \frac{8}{t^3} = \frac{-t^3 + 8t^6 - 8}{t^3} (t \neq 0)$

Derivata del prodotto e del quoziente di funzioni

Se due funzioni $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili, anche il prodotto $f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

Se $g \neq 0$ in ogni punto di I , allora $\frac{f}{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Esempi Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}(3x - x^3)$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})'(3x - x^3) + \sqrt[3]{x}(3x - x^3)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(3x - x^3) + \sqrt[3]{x}(3 - 3x^2) = 3\sqrt[3]{x} - 3x^2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x^{\frac{7}{3}} \quad (x \neq 0)$$

2. $g(x) = \frac{3\sqrt{x}}{x^2+4}$

$$g'(x) = \frac{(3\sqrt{x})'(x^2+4) - 3\sqrt{x}'(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x}}(x^2+4) - 6x\sqrt{x}}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{(x^2+4)^2} \left(6x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2\sqrt{x}}(x^2+4)\right) = -\frac{3}{2\sqrt{x}(x^2+4)^2} (3x^2 - 4) \quad (x \neq 0)$$

Derivata delle funzioni trigonometriche

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f'(x) &= \cos x \\ f(x) &= \cos x & f'(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Tramite la formula di derivazione del rapporto di funzioni calcoliamo la derivata della funzione $f(x) = \tan x$ ($x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$)

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ allora

$$\tan' x = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

la derivata della funzione tangente si può anche scrivere $\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

In conclusione:

$$f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Per le funzioni trigonometriche inverse si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x & f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) &= \arccos x & f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ f(x) &= \arctan x & f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Esempi Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $$f(x) = \frac{\sin x}{2-3 \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'(2-3 \cos x) - \sin x(2-3 \cos x)'}{(2-3 \cos x)^2} = \frac{\cos x(2-3 \cos x) - \sin x(3 \sin x)}{(2-3 \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}{(2-3 \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - 3}{(3 \cos x - 2)^2}$$
- $$f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'(x+1) - \sin x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\cos x(x+1) - \sin x(1)}{(x+1)^2} = \frac{(\cos x - \sin x + x \cos x)}{(x+1)^2}$$
- $$f(t) = 4 \arcsin t - 10 \arctan t$$

$$f'(t) = \frac{4}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{10}{t^2+1}$$
- $$f(t) = \sqrt{t} \arcsin t$$

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \arcsin t$$

Derivata delle funzioni esponenziali e logaritmiche

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$$

(se $a = e$ $f(x) = e^x$ e $f'(x) = e^x$)

$$f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$$

(se $a = e$ $f(x) = \ln x$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$)

Esempi Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $$f(x) = 4^x - 5 \log_9 x$$

$$f'(x) = 4^x \ln 4 - \frac{5}{x \ln 9} = 2 \cdot 2^{2x} \ln 2 - \frac{5}{2x \ln 3}$$
- $$f(x) = 3e^x + 10x^2 \ln x$$

$$f'(x) = 3e^x + 20x \ln x + 10x^2 \frac{1}{x} = 3e^x + 10x + 20x \ln x.$$
- Supponiamo che la posizione di un oggetto sia dato dalla funzione

$$f(x) = te^t$$

L'oggetto si ferma?

$$f'(t) = e^t + te^t = e^t(t+1)$$

L'oggetto si ferma quando la derivata è nulla. Per fare questo abbiamo bisogno di risolvere l'equazione:

$$e^t(t+1) = 0$$

Poichè $e^t \neq 0$ per ogni t , l'unica soluzione è $t = -1$.

se t assume solo valori positivi, l'oggetto non si ferma.

Derivata di funzioni composte

Sia $f : I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ una funzione reale derivabile in un punto x_0 e sia $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0)$

Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

Se f e g sono derivabili in ogni punto del loro dominio, allora:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Usando la seconda notazione per la derivata si ha che,

se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ allora la derivata è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Esempi Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $h(x) = \sqrt{3x-5}$

Si ha $h = g \circ f$ dove $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 3x - 5$

essendo $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 3$

si ha $h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-5}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

2. $h(x) = \sin(x^2 + x)$

$h = g \circ f$ dove $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2 + x$

essendo $f'(x) = \cos x$ e $g'(x) = 2x + 1$ si ha $h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = (2x + 1) \cos(x^2 + x)$

3. $h(x) = (2x^3 + \cos x)^{30}$

dove $f(x) = x^{30}$ e $g(x) = 2x^3 + \cos x$

essendo $f'(x) = 30x^{29}$ e $g'(x) = 6x^2 - \sin x$

si ha $h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = 30(2x^3 + \cos x)^{29}(6x^2 - \sin x)$

4. $h(x) = \ln(x^3 - x^{-3})$

dove $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^3 - x^{-3}$

essendo $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 3x^2 + 3x^{-4}$

si ha $h'(x) = f'[g(x)]g'(x) = \frac{1}{x^3 - x^{-3}}(3x^2 + 3x^{-4}) = -\frac{3x^6 + 3}{x - x^7}$

$$h(x) = \cos^4 x + \cos(x^4)$$

$$h' = 4 \cos^3 x (-\sin x) - 4x^3 \sin x^4 = -4 \cos^3 x \sin x - 4x^3 \sin x^4 = -4 (\cos^3 x \sin x + x^3 \sin x^4)$$

2 Punti critici

I punti critici rivestono un ruolo importante nello studio dei massimi e minimi di una funzione definita su un intervallo.

Definizione. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita su I , il punto $x_0 \in I$ è critico per f , se $f'(x_0) = 0$ o la funzione non è derivabile in x_0 .

Esempi Determinare i punti critici per le seguenti funzioni:

1. $f(x) = 6x^5 + 33x^4 - 30x^3 - 25$
 $f'(x) = 30x^4 + 132x^3 - 90x^2 = 6x^2(x + 5)(5x - 3)$

La funzione f e la sua derivata f' sono polinomi e così esistono ovunque. Pertanto, i soli dei punti critici saranno quei valori che rendono nulla la derivata. Quindi, dobbiamo risolvere l'equazione $6x^2(x + 5)(5x - 3) = 0$, Esse sono : $-5, \frac{3}{5}, 0$.

2. $f(t) = \sqrt[3]{t^2}(2t - 1)$

La funzione f è definita per tutti i numeri reali, ma la funzione non è derivabile nel punto 0.

$$f'(t) = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(5t - 1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}}(5t - 1)$$

Quindi i punti critici di f sono 0 punto di non derivabilità e $\frac{1}{5}$, punto in cui si annulla la derivata.

3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-6}$

Il dominio di f è dato dai numeri reali che non annullano il denominatore, dunque essendo

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

il denominatore si annulla per $x = -2, 3$, che non potranno dunque essere punti critici.

$f'(x) = -\frac{x^2+14x-1}{(-x^2+x+6)^2}$, pertanto i punti critici della funzione sono quelli che annullano $x^2 + 14x - 1$

$$x^2 + 14x - 1 = 0, \text{ cioè per } x = 5\sqrt{2} - 7, -5\sqrt{2} - 7$$

4. $f(x) = 6x - 4 \cos(3x)$

il dominio di f è \mathbb{R} e così non ci sono punti critici per i quali la derivata non esiste. Gli unici punti critici verranno da punti che rendono la derivata nulla.

$$f'(x) = 12 \sin 3x + 6$$

$$12 \sin 3x + 6 = 0, \text{ cioè } \sin 3x = -\frac{1}{2}, \text{ cioè significa } 3x = -\frac{1}{6}\pi + 2\pi k \text{ oppure } 3x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k \text{ (} k \text{ numero intero)}$$

$$\text{In conclusione } x = -\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi k \text{ oppure } x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi k \text{ (} k \text{ numero intero).}$$

Teorema di Fermat

Data una funzione definita su un intervallo I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo per f , allora x_0 è un punto critico per f .

Questo teorema afferma che c'è una relazione tra i punti di estremo relativo di una funzione e i suoi punti critici ; ci permette infatti di dare una lista di tutti i possibili estremi relativi della funzione stessa.

Si consideri ad esempio, $f(x) = x^2$. Questa funzione ha un unico punto critico per $x_0 = 0$, che è proprio il minimo della funzione.

Occorre però fare attenzione a quanto dice il teorema di Fermat: afferma che ogni punto estremante è un punto critico, ma non l'inverso.

Infatti, se si considera la funzione $f(x) = x^3$ come la precedente, ha un unico punto critico per $x_0 = 0$, ma tale punto non è estremo per f .

Il teorema di Fermat ci permette di calcolare i massimi e minimi di una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato.

Una funzione continua, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è dotata, per il teorema di Weirstrass di massimo e minimo assoluti. I punti di massimo e minimo assoluti possono coincidere con i punti estremi, oppure possono essere interni all'intervallo. Il Teorema di Fermat ci fornisce l'elenco dei punti critici che è anche un elenco dei punti tra cui ci sono tutti i possibili estremi relativi. Così unendo i punti estremi ai punti critici si ottiene un elenco di tutti i possibili punti di estremo assoluto.

Dobbiamo solo ricordare che gli estremi assoluti non sono altro che il più grande e il più piccolo dei valori assunti dalla funzione

Ecco la procedura per la ricerca degli estremi assoluti di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Verificare che la funzione è continua su l'intervallo $[a, b]$.
2. Trova tutti i punti critici di f che cadono nell' intervallo $[a, b]$.

3. Calcolare i valori di f nei punti critici e nei punti estremi $(a \text{ e } b)$.
4. Confrontare questi valori e trovare gli estremi assoluti

Esempi

1. Determinare i massimi e i minimi della funzione $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ nell'intervallo $[-4, 2]$.

f è un polinomio ed è continua in tutto \mathbb{R} e, in particolare, è continua nell'intervallo $[-4, 2]$.

Cerchiamo i punti critici di f .

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$6x^2 + 6x - 12 = 0, \text{ per } x = -2, 1.$$

I punti critici di f si trovano nell'intervallo $[-4, 2]$.

Ora dobbiamo valutare f nei punti critici e nei punti estremi dell'intervallo.

$$f(-4) = -28$$

$$f(-2) = 24$$

$$f(1) = -3$$

$$f(2) = 8$$

Quindi, il massimo assoluto di f è 24 e il punto di massimo assoluto è -2 ; il minimo assoluto di f è -28 , e il punto di minimo assoluto è -4 .

2. Determinare i massimi e i minimi della stessa funzione $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$ nell'intervallo $[0, 2]$.

Si noti che questo problema è quasi identico al primo problema. L'unica differenza è l'intervallo su cui f è definita. Questo piccolo cambiamento può cambiare completamente la risposta

Dei due punti critici considerati prima, dobbiamo considerare solo il punto 1 e valutare la funzione nei punti 0, 1, 2.

$$f(0) = 4$$

$$f(1) = -3$$

$$f(2) = 8$$

Allora il massimo assoluto è 8, e il minimo assoluto è -3 , il punto di massimo assoluto è 2, il punto di minimo assoluto è 1 (entrambi punti estremi)

3. Supponiamo che la quantità di denaro in euro in un conto in banca dopo t anni sia dato da,

$$A(t) = 2000 - 10te^{5-\frac{t^2}{8}}$$

Determinare l'importo massimo e minimo di denaro nel conto durante i primi 10 anni che si è aperto.

La derivata esiste in tutto \mathbb{R} e

$$A'(t) = \frac{5}{2}e^{5-\frac{1}{8}t^2} (t^2 - 4).$$

$$A'(t) = 0, \text{ per } t^2 - 4 = 0, \text{ quindi per } t = -2, 2$$

Abbiamo due punti critici, tuttavia solo 2 appartiene all'intervallo.

$$A(0) = 2000$$

$$A(2) = 2000 - 20e^{\frac{9}{8}} = 199.66$$

$$A(10) = 2000 - 100e^{-\frac{15}{8}} = 1999.9$$

Quindi, l'importo massimo in conto sarà euro 2000, che si verifica per $t = 0$ e l'importo minimo del conto sarà di euro 199,66, che si verifica dopo due 2 anni.

4. Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = 3x(x+4)^{\frac{2}{3}}$ nell'intervallo $[-5, -1]$.

la funzione f è continua in tutto \mathbb{R} non è derivabile nel punto -4 e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{5x+12}{\sqrt[3]{x+4}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ per } x = -\frac{12}{5}$$

Pertanto

$$f(-5) = -15$$

$$f(-4) = 0$$

$$f(-\frac{12}{5}) = -\frac{144}{25} \sqrt[3]{5} = -9.8495$$

$$f(-1) = -3\sqrt[3]{3^2} = -6.2403$$

Il massimo assoluto di f è 0 e il punto di massimo assoluto è -4 ; il minimo assoluto è -15 e il punto di minimo assoluto è $-\frac{12}{5}$.

Teorema di Rolle.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b) etale che $f(a) = f(b)$.

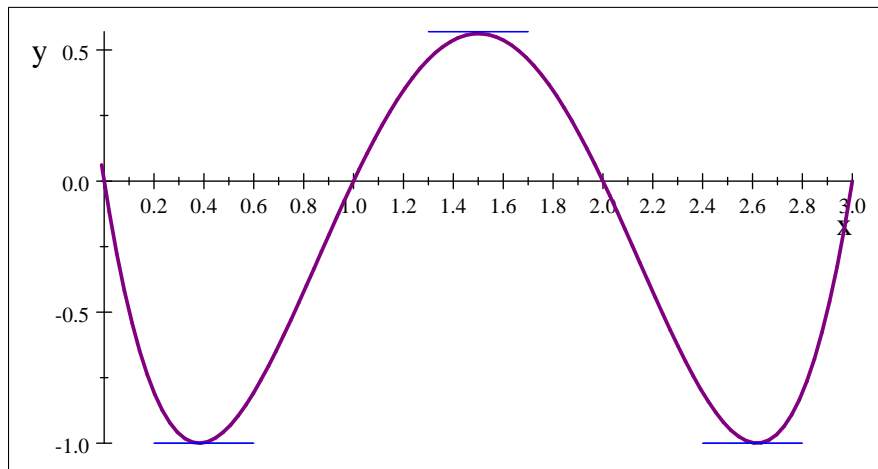
Allora esiste c , $a < c < b$ tale che $f'(c) = 0$

Dimostrazione. in virtù del Teorema di Weierstrass, f ammette massimo M e minimo m assoluti; in altre parole esistono due punti x_m, x_M nell'intervallo $[a, b]$ tali che $f(x_m) = m, f(x_M) = M$.

Si possono presentare solo due alternative: o almeno uno dei due punti x_m, x_M è interno all'intervallo $[a, b]$ o entrambe cadono negli estremi.

Nel primo caso, supponiamo che il punto x_m stia nell'intervallo aperto (a, b) , allora per per x_m sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Fermat, e quindi $f'(x_m) = 0$

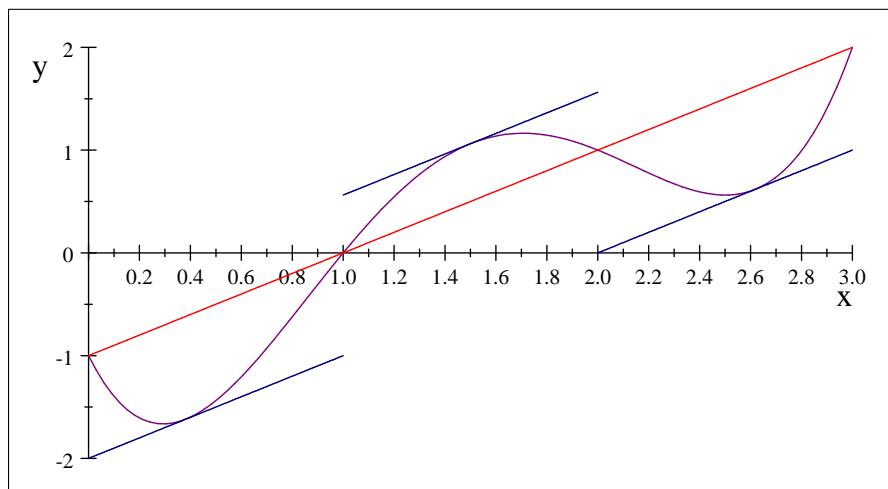
Nel secondo caso, se per esempio $x_m = a, x_M = b$ la funzione è tale per cui $m = f(a) = f(b) = M$, pertanto la funzione è costante in tutto l'intervallo $[a, b]$ e in ogni suo punto interno la derivata di f è nulla.



Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b) .

Allora esiste c , $a < c < b$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dal punto di vista geometrico il teorema di Lagrange afferma che il grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, con estremi di coordinate $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, dotata di retta tangente in ogni punto di (a, b) , esiste almeno un punto P d'ascissa $a < c < b$, in cui la tangente al grafico di f è parallela alla secante passante per i punti A e B .

Esempio Calcolare per quali valori il teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$ nell'intervallo $[-1, 2]$

f è un polinomio, pertanto è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} e in particolare nell'intervallo considerato.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1.$$

$$\text{Inoltre } \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{14 - 2}{2 + 1} = 4$$

Dobbiamo quindi trovare per quali valori di c , $f'(c) = 4$, dunque

$$3c^2 + 4c - 1 = 4. \text{ Le soluzioni sono } \frac{1}{3}\sqrt{19} - \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{19} - \frac{2}{3}.$$

$-\frac{1}{3}\sqrt{19} - \frac{2}{3}$ non appartiene nell'intervallo $(-1, 2)$ e quindi è da scartare.

L'unica soluzione in questo caso è $\frac{1}{3}\sqrt{19} - \frac{2}{3}$

Coseguenze del teorema di Lagrange

Conseguenze importanti del teorema di Lagrange riguardano il legame tra il segno della derivata di una funzione derivabile f definita su un intervallo e la monotonia di f .

Ricordiamo a questo scopo, le definizioni di funzioni monotone.

- Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo I , si dice monotona crescente in I se, se, per ogni $x_1, x_2 \in I$ se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo I , si dice monotona strettamente crescente in I se, se, per ogni $x_1, x_2 \in I$ se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo I , si dice monotona decrescente in I se, se, per ogni $x_1, x_2 \in I$ se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definita in un intervallo I , si dice monotona strettamente decrescente in I se, se, per ogni $x_1, x_2 \in I$ se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) > f(x_2)$.

Detto in altri termini, una funzione monotona conserva o inverte l'ordinamento del dominio.

Si osservi che ogni funzione costante in un intervallo è sia monotona crescente che monotona decrescente, ma non è strettamente crescente nè strettamente decrescente.

Elenchiamo ora le conseguenze del teorema di Lagrange:

1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f'(x) = 0$, per tutti gli $x \in (a, b)$, allora f è costante su $[a, b]$.

La dimostrazione è molto semplice. Si considerino due punti x e y , $a \leq x < y \leq b$. Poichè f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) è continua in $[x, y]$ e derivabile in (x, y) . Quindi si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x, y]$. In questo modo si ha:

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ dove } x < c < y.$$

Essendo $c \in (a, b)$ $f'(c) = 0$ e quindi $f(x) = f(y)$, per ogni $x, y \in (a, b)$. Supponiamo che questo valore sia k . Dunque $f(x) = k$, in ogni punto di (a, b) . Per la continuità di f si ha $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ e $f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = k$; si conclude che anche $f(a) = f(b) = k$.

2. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue e derivabili in (a, b) tale che $f'(x) = g'(x)$, per tutti gli $x \in (a, b)$, allora $f(x) = g(x) + k$. dove k è una costante.

Questo teorema è una diretta conseguenza del precedente. Infatti:

$$f'(x) - g'(x) = (f' - g')(x) = (f - g)' = 0 \text{ per tutti gli } x \in (a, b), \text{ e } f' - g' \text{ è continua, quindi } (f - g)(x) = k \text{ e } f(x) = g(x) + k.$$

3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f'(x) > 0$, per tutti gli $x \in (a, b)$, allora f è strettamente crescente su $[a, b]$.

Come nel primo caso considerino due punti x e y , $a \leq x < y \leq b$

Poichè f è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) è continua in $[x, y]$ e derivabile in (x, y) . Quindi si può applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x, y]$.

In questo modo si ha:

$$f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \text{ dove } x < c < y.$$

Essendo $c \in (a, b)$ $f'(c) > 0$ e quindi $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$; essendo $x < y$ cioè $y - x > 0$, si deduce che $f(y) > f(x)$.

Analogamente si dimostra che:

4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f'(x) < 0$, per tutti gli $x \in (a, b)$, allora f è strettamente decrescente su $[a, b]$.

Le conseguenze del teorema di Lagrange ci permettono di studiare gli intervalli di monotonia di una funzione derivabile.

Esempi

1. Determinare gli intervalli di crescita e decrescenza della seguente funzione:

$$f(x) = -x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{40}{3}x^3 + 5$$

Si osservi che, essendo la f un polinomio è continua e derivabile in tutto \mathbb{R} . Per determinare se la funzione è crescente o decrescente avremo bisogno di studiare il segno della derivata prima.

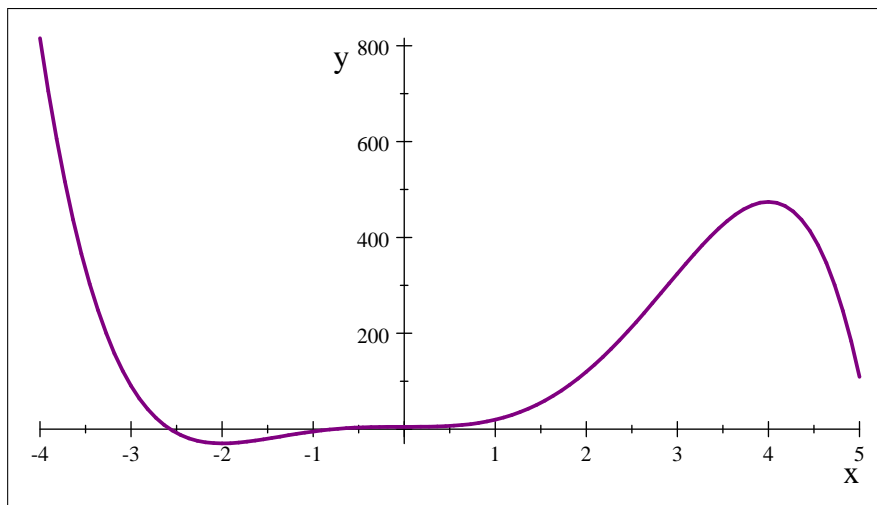
$$f'(x) = -5x^4 + 10x^3 + 40x^2$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$-5x^4 + 10x^3 + 40x^2 > 0, \text{ per } -2 < x < 0 \text{ oppure } 0 < x < 4.$$

Allora la funzione è crescente negli intervalli $(-2, 0)$ e $(0, 4)$ e decrescente negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(4, \infty)$.

Ha un minimo relativo nel punto -2 e un massimo relativo nel punto 4



2. Determinare gli intervalli di crescita e decrescenza della seguente funzione: $f(x) = x\sqrt[3]{x^2 - 4}$

Si osservi che, f è continua \mathbb{R} e derivabile per tutti i punti diversi da 2 e -2 . Studiamo il segno della derivata prima:

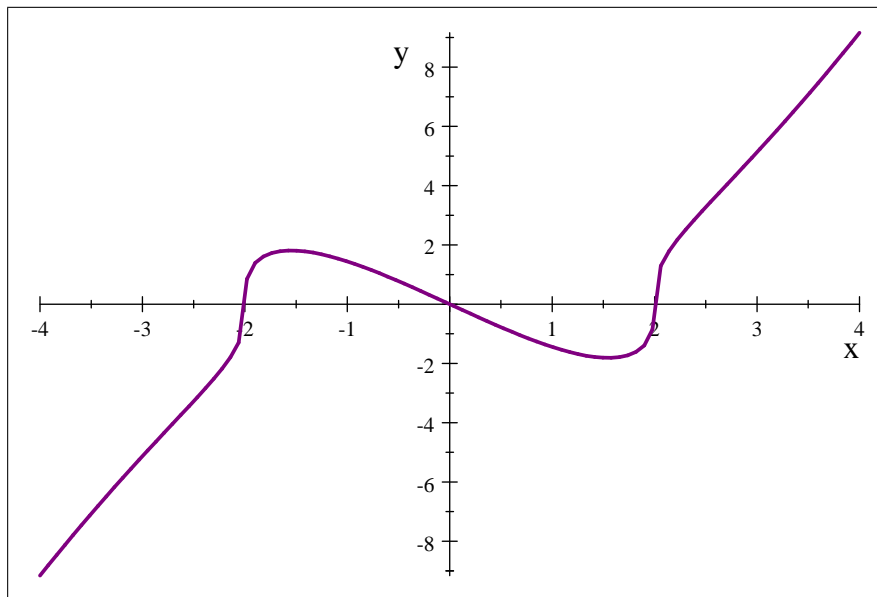
$$f'(x) = \frac{1}{3(x^2-4)} \sqrt[3]{x^2-4} (5x^2-12) = \frac{(5x^2-12)}{3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}},$$

$\frac{(5x^2-12)}{3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} > 0$ negli intervalli $(-\infty, -\frac{2}{5}\sqrt{15})$ $(\frac{2}{5}\sqrt{15}, +\infty)$ dove la funzione è crescente,

$\frac{(5x^2-12)}{3(x^2-4)^{\frac{2}{3}}} < 0$, nell' intervallo $(-\frac{2}{5}\sqrt{15}, \frac{2}{5}\sqrt{15})$, dove la funzione è decrescente

.

La funzione ha massimi relativi nel punto $-\frac{2}{5}\sqrt{15}(-1.5492)$ e minimo relativo nel punto $\frac{2}{5}\sqrt{15}(1.5492)$

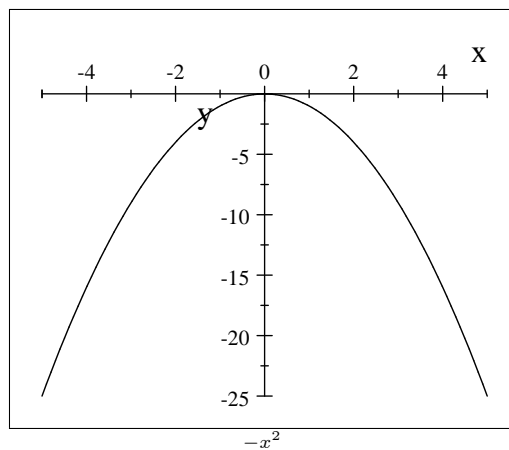
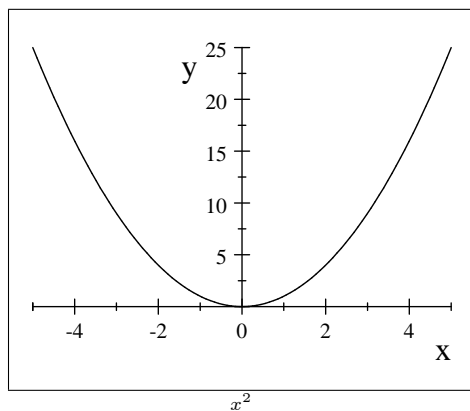


3 Concavità e convessità

Data la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in ogni punto dell'intervallo I su cui f è definita allora

1. f è convessa su I se tutte le tangenti al grafico di f sono al di sotto del grafico.
2. f è concava su I se tutte le tangenti al grafico di f sono al di sopra del grafico.

La parabola $f(x) = x^2$ è convessa, mentre la parabola $f(x) = -x^2$ è concava



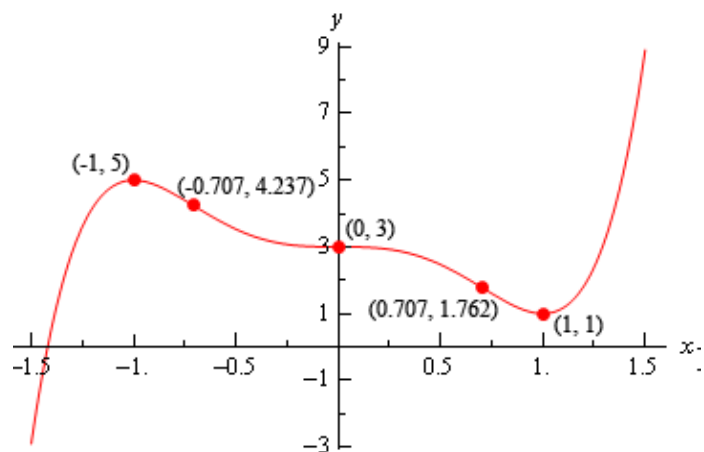
Un punto del dominio di f , I è chiamato punto di flesso se la concavità del grafico cambia in quel punto.

Data la funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile due volte in ogni punto dell'intervallo I su cui f è definita allora:

1. Se $f''(x) > 0$ per tutti x di I , f è convessa su I .
2. Se $f''(x) < 0$ per tutti x di I , f è concava su I .

Esempio Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$; individuare gli intervalli dove la funzione è crescente o decrescente e gli intervalli in cui la funzione è convessa e concava.

$$f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$$



$15x^2(x^2 - 1) > 0$, negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$, quindi in tali intervalli f è crescente

$15x^2(x^2 - 1) < 0$, negli intervalli $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, quindi in tali intervalli f è decrescente

$f'(x) = 0$, per $x = -1, 0, 1$ (punti critici)

Il punto -1 è un punto di massimo relativo, il punto 1 è un punto di minimo relativo.

Calcoliamo ora gli intervalli di convessità, e i punti di flesso

$$f'' = 30x(2x^2 - 1)$$

$30x(2x^2 - 1) > 0$, negli intervalli $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ e $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty)$, quindi in tali intervalli f è convessa

$30x(2x^2 - 1) < 0$, negli intervalli $(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ e $(0, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, quindi in tali intervalli f è concava.

C'è pertanto un cambio di concavità nei punti $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0 e $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ che sono quindi punti di flesso