EQUAZIONI DIFFERENZIALII

Le equazioni funzionali sono equazioni in cui l'incognita è una funzione.

ESEMPIO. Trovare una funzione $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ tale che $f(2x) = f^{\,2}(x)$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.

Come subito si vede, ogni funzione del tipo$f(x) = a^x$, con $a > 0$, è soluzione del nostro problema.

DEFINIZIONE. Dicesi equazione differenziale ordinaria un'equazione funzionale in cui compaiono una o più derivate della funzione incognita.

Le equazioni differenziali sono presenti in natura in molti casi: quasi ogni situazione fisica che si verifica in natura può essere descritta con una equazione differenziale adeguata.

L'equazione differenziale può essere facile o difficile da risolvere, dipendendo della situazione e dalle ipotesi che vengono considerate.

Spesso non possono essere risolte elementarmente, tuttavia esse descrivono il problema.

Una delle situazioni fisiche più semplici è quella di un oggetto in caduta libera.

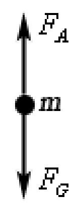
Se consideriamo un oggetto in caduta libera , con massa m assumendo che solo la gravità e la resistenza dell'aria agirà sull'oggetto mentre cade, possiamo ricavare una equazione differenziale che, una volta risolta, ci darà la velocità dell'oggetto in qualsiasi momento, t.

Assumiamo che le forze che agiscono nella direzione verso il basso siano forze positive, mentre le forze che agiscono nella direzione verso l'alto sono negative.

Allo stesso modo, si suppone che un oggetto in movimento verso il basso,cioè in caduta, avrà una velocità positiva.

La forza di gravità ed è data da $F_g = mg$, dove g è l'accelerazione di gravità. $(g = 9,8\frac{m}{s^2})$

$F_A = -\gamma v$ $(\gamma > 0)$ è la forza generata della resistenza dell'aria che si suppone proporzionale alla velocità v, della massa.



La seconda legge di Newton può essere scritta come:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = F_g + F_A$$

cioè:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

e quindi
$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m}$ che può essere scritta $v'(t) = g - \frac{\gamma v}{m}$

Questa è una equazione differenziale lineare del primo ordine che, una volta risolta, darà la velocità, v (in m/s), di un oggetto in caduta di massa m che ha sia la gravità e la resistenza dell'aria che agiscono su di esso.

Così, supponiamo che abbiamo una massa di 2 kg e che $\gamma = 0,392$. Si ottiene quindi la seguente equazione differenziale.

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 9,8 - 1,196v$$

Supponiamo che in un istante t_0, la velocità sia $v(t_0) = 30\ m/s$. Quindi, otteniamo:

$$(\frac{dv}{dt})_0 = v'(t_0) = 3,92$$

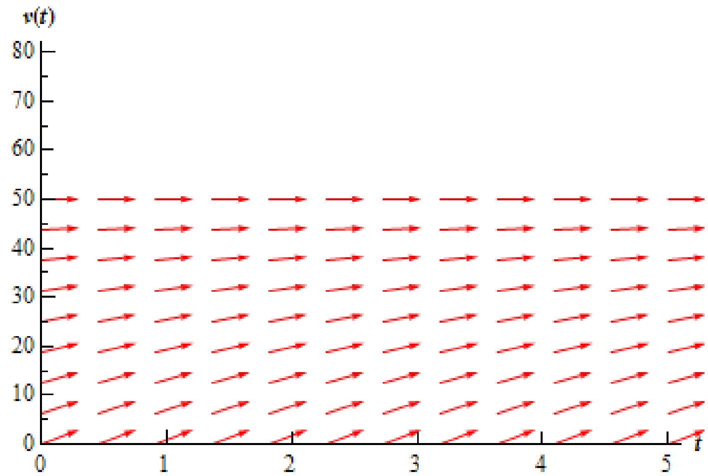
Così, in t_0 il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione velocità in funzione del tempo è $3,92$, mentre la stessa funzione, in quel punto assume valore 30 m/s

Potremmo continuare in questo modo e calcolare i diversi valori di v e calcolare la pendenza della retta tangente per quei valori della velocità.

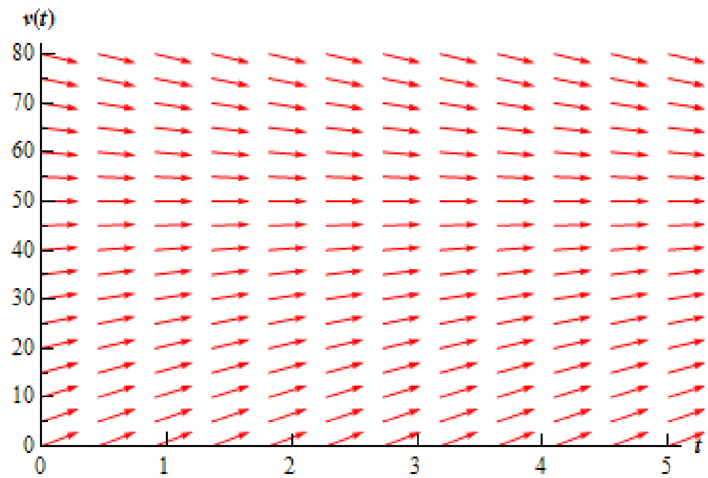
Se cerchiamo i valori in cui la velocità avrà pendenza zero ossia retta tangente orizzontale, otteniamo un solo valore cioè $v = 50m/s$.

Con $v < 50$. cioè per la regione al di sotto $v = 50$, abbiamo il primo grasfico, mentre per $0 < v < 50$ abbiamo il secondo grafico.

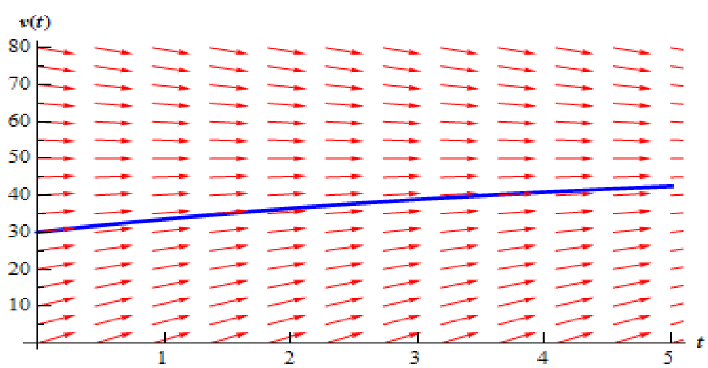
Questi grafici rappresentano il campo delle direzioni per l'equazione differenziale $v'(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 9,8 - 1,196v$.



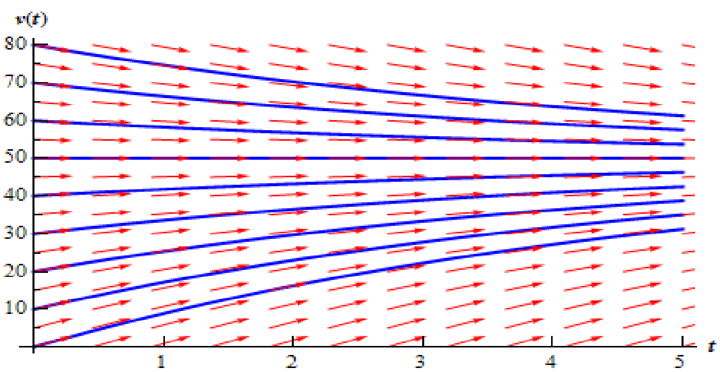
v(t)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
t



v(t)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
t



v(t)
80
70
60
50
40
30
20
10
1
2
3
4
5
t



La curva bleu nel primo grafico e le molte curve bleu nel secondo rappresentano il grafico di una soluzione dell'equazione differenziale, cioè il grafico di una funzione che in ogni punto ha retta tangente con la direzione indicata dalla freccia.

Le equazioni differenziali del primo ordine esprimono un legame tra:

- una variabile indipendente x;
    - una variabile dipendente y (che sta ad indicare una funzione $y = y(x)$);
    - la derivata prima della funzione y.

Esempi:
$y' = f(x)$ è un'equazione differenziale la cui soluzione è una primitiva di$f(x)$.

Ad esempio
$y^{'} = e^x + x^2$, ha come soluzione particolare $y = e^x + \frac{x^3}{3}$, mentre la soluzione generica è
$y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$, dove c è una c ostante arbitraria.

$y' = y$ ha come soluzione $y(x) = e^x$ e come soluzione generica: $y(x) = ce^x$, con c una costante arbitraria.
Infatti la derivata di $y(x)$ è proprio ce^xcioè y stesso.

Dagli esempi si vede che le soluzioni delle equazioni differenziali non sono uniche ma dipendono da una o, in generale, da più costanti arbitrarie.
Una equazione differenziale in cui compare solo la derivata prima della funzione incognita si dice equazione differenziale del primo ordine;
se compare anche la derivata seconda si dice del secondo ordine, se compare anche la derivata di ordine n si dice equazione differenziale di ordine n.
Un'equazione differenziale del primo ordine si dice in forma normale se è del tipo:
$y' = F(x, y)$.

Le equazioni$y^{'} = y$,$y^{'} = \frac{y}{x+y}$sono equazioni differenziale del primo ordine in forma normale.

Un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale$y^{'} = F(x, y)$ può essere interpretata geometricamente come l'associare a ogni punto (x, y) del piano cartesiano una direzione (determinata da $y^{'}$ che è il coefficiente angolare della funzione incognita $y = y(x)$).
In altre parole ogni soluzione $y = y(x)$ dovrà avere in (x, y) retta tangente di coefficiente angolare$y^{'} = F(x, y)$.
Si determina in questo modo un campo di direzioni che associa ad ogni (x, y) la direzione determinata dal coefficiente angolare $y^{'} = F(x, y)$

Data un'equazione differenziale $y^{'} = F(x, y)$ il problema di trovare la soluzione $y = y(x)$ che soddisfi la condizione iniziale $y_0 = y(x_0)$ si dice problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Non esiste alcuna formula generale per la soluzione del problema di Cauchy.
Esistono però casi particolari chesi possono risolvere tali.

Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale della forma
$y\prime = f(x)g(y)$
si dice a variabili separabili.

Ad esempio l'equazione $y' = \sin(x)\sqrt{y}$ è a variabili separabili.

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \qquad ;$$

se $f : I \to R$ *è continua e* $g : J \to R$, *è continua con derivata prima continua,* x_o*in* I, y_0 *in* J,
esiste una e una sola funzione $y = f(x)$*soluzione al problema di Cauchy*

Per risolvere l'equazione differenziale data supponiamo anzitutto che $g(y) = 0$; allora, evidentemente, la funzione costante $y = y_0$ è soluzione.
Infatti la derivata di una costante è nulla e, quindi, entrambi i membri dell'equazione si annullano. Il grafico della funzione costante $y = y_0$ è una retta parallela all'asse delle ascisse.

Se $g(y) \neq 0$ tralasciando per un momento la condizione $y_0 = f(x_0)$,possiamo scrivere y' come $\frac{dy}{dx}$ e trattare questo termine come una frazione.
Moltiplicando i due membri di $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ per dx e dividendo per $g(y)$ si ottiene:
$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
Nell'esempio sopra dato otteniamo:
$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\sqrt{y}$
e quindi

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sin(x)dx$
e poi
$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sin(x)dx$
e quindi

$2\sqrt{y} = -\cos(x) + c$, cioè $y = \left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\cos x\right)^2$
imponendo infine, la condizione iniziale $y_0 = y(x_0)$, si determina il valore di c.

Esempi

1.$\begin{cases} y' = 6y^2x \\ \frac{1}{25} = y(1) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = 6y^2x$, ossia $\frac{dy}{y^2} = 6xdx$.
La soluzone generale (integrale generale dell'equazione differenziale) è data da $y = 0$ e dalle soluzioni di
$\int \frac{dy}{y^2} = \int 6xdx$. cioè $-\frac{1}{y} = 3x^2 + c$,,quindi $y = -\frac{1}{c+3x^2}$.
La soluzione particolare si ottiene ponendo $\frac{1}{25} = y(1)$, quindi $\frac{1}{25} = -\frac{1}{c+3(1)^2}$, e $c = -28$, si ottiene : $y = -\frac{1}{-28+3x^2}. = \frac{1}{28-3x^2}$

2.$\begin{cases} y' = 6y^2x \\ 0 = y(1) \end{cases}$

La soluzione è data dalla funzione costante $y(x) = 0$
3.$\begin{cases} y' = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4} \\ y(1) = 3 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x-4}{2y-4}$, cioè $(2y-4)dy = (3x^2+4x-4)dx$, e $\int(2y-4)dy = \int(3x^2+4x-4)dx$: $y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x + c$.
Sostituendo $y(1) = 3$ si ottiene $9 - 12 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + c = -3 = c - 1, c = -2$

Si ha quindi $y(y-4) = x\left(x^2 + 2x - 4\right) - 2$,ossia : $y^2 - 4y = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$, SLe soluzioni sono$y(x) = 2 - \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2}$ oppure $y(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2} + 2$ .Dalla condizione $y(1) = 3$ si deduce che la soluzione cercata è $y(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 4x + 2} + 2$

4. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale: $y' = e^{-y}(2x - 4)$

$\frac{dy}{dx} = e^{-y}(2x-4)$
$\frac{1}{e^{-y}}dy = (2x-4)dx;\ e^{y}dy = (2x-4)dx :$
$e^{-y} = 0$ non ha soluzioni, quindi non esistono soluzioni singolari.
Integrando si ha

$\int e^{y}dy = \int(2x-4)dx;\ \ e^{y} = x^2 - 4x + c,\ y = ln(x^2 - 4x + c)$

Equazioni differenziali lineari

Siano $a, b : I \to R$ due funzioni continue continua definite su un intervallo I di numeri reali

funzioni continue.

Considerare l'equazione differenziale:

$y' = a(x)y + b(x)$

questa si dice equazione differenziale linerare del primo ordine

Trovare una soluzione dell'equazione data significa trovare una funzione $y : I \to R$, con y derivabile in ogni punto di I,

tale che $y'(x) = a(x)y + b(x)$ per ogni x in I.

Data l'equazione differenziale lineare:$y' = a(x)y + b(x)$,*con* $a, b : I \to R$ *continue* ,

l'integrale generale dll'equazione è dato da.

$$y(x) = e^{A(x)}(\int e^{-A(x)}b(x) + c)$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

Dimostrazione

moltiplichiamo l'equazione $y' = a(x)y + b(x)$ per il cosiddetto fattore integrante $e^{-A(x)}$ dove $A(x)$ è

una primitiva di $a(x)$:

$e^{-A(x)}y'(x) = e^{-A(x)}a(x)y + e^{-A(x)}b(x)$, ossia

$e^{-A(x)}y'(x) - e^{-A(x)}a(x)y = e^{-A(x)}b(x)$

Il primo membro di questa equazione può essere interpretato

come la derivata della funzione $e^{-A(x)}y(x)$, infatti

$(e^{-A(x)}y(x))' = -e^{-A(x)}a(x)y(x) + e^{-A(x)}y'(x)$.

Quindi la nostra equazione risulta:

$(e^{-A(x)}y(x))' = e^{-A(x)}b(x)$

Integrando ora entrambi i membri si ottiene

$e^{-A(x)}y(x) = \int e^{-A(x)}b(x)dx + c$ dove con $\int e^{-A(x)}b(x)dx$ si intende una qualsiasi primitiva di $e^{-A(x)}b(x)$.

e quindi si può esplicitare la soluzione:

$y(x) = e^{A(x)}(\int e^{-A(x)}b(x)dx + c)$

detta integrale generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Esempi

1.risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = (-\tan x)y + \cos^2 x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Una primitiva di $a(x) = -\tan x$ è data da $A(x) = \ln(\cos x)$.
La soluzione generale dell'equazione fata è
$y(x) = e^{\ln(\cos x)}(\int e^{-\ln(\cos x)} \cos^2 x dx + c) = \cos x(\int e^{\ln(\cos x)^{-1}} \cos^2 x dx + c) = \cos x(\int \frac{1}{\cos x} \cos^2 x dx + c) = \cos x(\int \cos x dx + c) = \cos x\,(c + \sin x)$
Imponiamo ora la condizione iniziale $y(0) = 2$.
$y(0) = \cos 0\,(c + \sin 0) = c = 2$.
Pertanto la soluzione al problema di Cauchy è:
$y(x) = \cos x\,(2 + \sin x)$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = -\frac{2t}{1+t^2} y + \frac{2}{1+t^2} \\ y(0) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Una primitiva di $a(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$ è data da $A(t) = -\ln\left(1 + t^2\right)$.
La soluzione generale dell'equazione fata è
$y(t) = e^{-\ln\left(1+t^2\right)}(\int e^{\ln\left(1+t^2\right)} \frac{2}{1+t^2} dt + c) = \frac{1}{1+t^2}(\int \left(1 + t^2\right) \frac{2}{1+t^2} dt + c) = \frac{1}{1+t^2}(\int 2dt + c) = \frac{c+2t}{t^2+1}$
Imponiamo ora la condizione iniziale $y(0) = \frac{2}{5}$.
$y(0) = \frac{c+0}{0+1} = c = \frac{2}{5}$.
Pertanto la soluzione al problema di Cauchy è:
$y(t) = \frac{\frac{2}{5}+2t}{t^2+1} = \frac{2}{5} \frac{1+5t}{t^2+1}$

Verifichiamo la soluzione trovata.
La condizione iniziale $y(0) = \frac{2}{5}$ è banalmente verificata.
Calcoliamo y' :

$y'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5} \frac{1+5t}{t^2+1}\right) = -\frac{2}{5(t^2+1)^2}\left(5t^2 + 2t - 5\right)$
Calcoliamo il secondo membro dell'equazione :
$-\frac{2t}{1+t^2} y + \frac{2}{1+t^2} = -\frac{2t}{1+t^2}(\frac{2(1+5t)}{5(t^2+1)}) + \frac{2}{1+t^2} = -\frac{2}{5(t^2+1)^2}\left(5t^2 + 2t - 5\right)$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} xy' = -y + x + 1 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

Per poter risolvere l'equazione la dobbiamo portare in forma normale, cioè diviere ambo i membri per $2x$:

$y' = -\frac{1}{x} y + 1 + \frac{1}{x}$

Possiamo limitarci a considerare $x > 0$,per la condizione iniziale, essendo $2 > 0$

Una primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$ è data da $A(x) = \ln x$.

La soluzione generale dell'equazione data è

$y(x) = e^{-\ln(x)}(\int e^{\ln(x)}(1+\frac{1}{x})dx+c) = \frac{1}{x}(\int x(1+\frac{1}{x})dx+c) = \frac{1}{x}(\int(x+1)dx+c)$ $= \frac{1}{2x}\left(x^2 + 2x + 2c\right)$

Imponiamo ora la condizione iniziale $y(2) = 4$.

$y(2) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{2}2\,(2+2)\right) = \frac{1}{2}c + 2 = 4$, quindi $c = 4$

Ossia la soluzione è;

$y(x) = \frac{1}{x}\left(4 + \frac{1}{2}x\,(x+2)\right) = \frac{1}{2x}\left(x^2 + 2x + 8\right)$

Verifichiamo che la soluzione trovata sia corretta:

$y(2) = \frac{1}{2(2)}\left(2^2 + 2(2) + 8\right) = 4$

$xy'(x) = x\frac{d}{dx}(\frac{1}{2x}\left(x^2 + 2x + 8\right)) = \frac{1}{2x}\left(x^2 - 8\right)$

mentre

$-y + x + 1 = -\frac{1}{2x}\left(x^2 + 2x + 8\right) + x + 1 = \frac{1}{2x}\left(x^2 - 8\right)$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (\cos^2 x)(\sin x)y' = -(\cos^3 x)y + 1 \\ y(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

Per poter risolvere l'equazione la dobbiamo portare in forma normale, cioè diviere ambo i membri per $(\cos^2 x)(\sin x)$:

$y' = \frac{-(\cos^3 x)y+1}{(\cos^2 x)(\sin x)} = -\frac{y\cos^3 x}{\cos^2 x \sin x} + \frac{1}{\cos^2 x \sin x} = -y\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos^2 x \sin x}$

Possiamo limitarci a considerare $0 < x < \frac{\pi}{2}$,per la condizione iniziale

Una primitiva di $a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ è data da $A(x) = -\ln(\sin x)$.

La soluzione generale dell'equazione data è

$y(x) = e^{-\ln(\sin x)}(\int e^{\ln(\sin x)}(\frac{1}{\cos^2 x \sin x})dx + c) = \frac{1}{\sin x}(\int \sin x(\frac{1}{\cos^2 x \sin x})dx + c) = \frac{1}{\sin x}(\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + c) = \frac{1}{\sin x}\,(\tan x + c) = \frac{1}{\sin x}\,(c + \tan x) = \frac{c}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

Imponiamo ora la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

$y(\frac{\pi}{4}) = \frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}c + \sqrt{2} = 0$ quindi $c = -1$

La soluzione è pertanto:

$y(x) = -\frac{1}{\sin x} + +\frac{1}{\cos x}$

Verifichiamo che la soluzione trovata sia corretta:

$y(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} = 0$

$(\cos^2 x)(\sin x)y' = (\cos^2 x)(\sin x)\frac{d}{dx}(-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) = (\cos^2 x)(\sin x)(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}) = \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \sin^2 x$

$-(\cos^3 x)(-\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}) + 1 = \frac{\cos^3 x}{\sin x} - \cos^2 x + 1 = \frac{\cos^3 x}{\sin x} + \sin^2 x$