

CAPITOLO 5

ESPONENZIALI E LOGARITMI

ESPONENZIALI

Teoria in sintesi

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

- Sono definite:

$$(-\sqrt{3})^2 = (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3});$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

- Non sono definite:

$$(-2^{\sqrt{3}}); 0^0; 0^{-3}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

FUNZIONE ESPONENZIALE

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x, \text{ con } a > 0 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}.$$

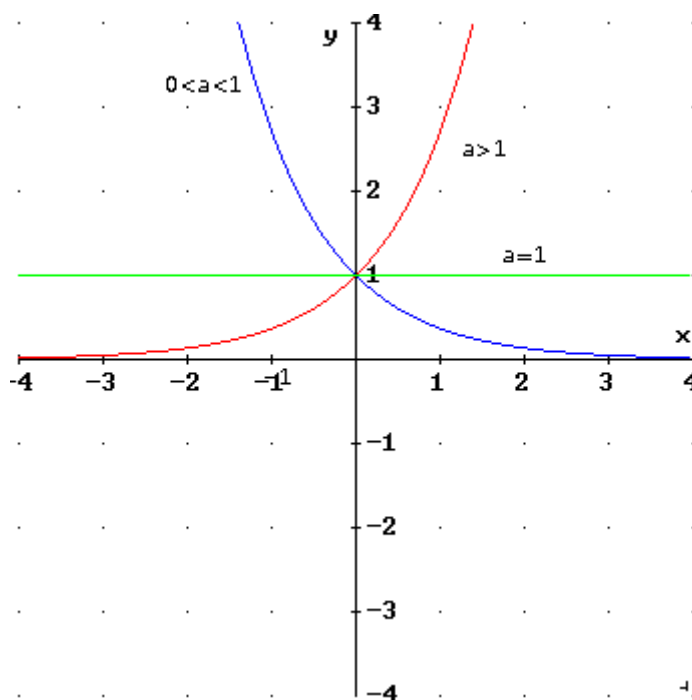
- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto \mathbf{R} ;
- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è \mathbf{R}^+ (la funzione esponenziale

è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale $y=a^x$ nei vari casi



EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Teoria in sintesi

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b \text{ , con } a > 0 \text{ e } b > 0 \text{ ; } x \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile*, *può ammettere come soluzione ogni valore di x reale*, o essere *determinata* :

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$; esempio: $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *verificata da ogni valore reale di x* se $a = 1$, $b = 1$; esempio: $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$; esempio: $3^x = 5$.

Si chiama **logaritmo in base a di b** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare

nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b .

$$a^x = b$$



a = base dell'eponenziale
e del logaritmo

$$x = \log_a b$$

Esempi:

1. Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti :
 $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$;
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi : $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$.

2. Risolvere l'equazione esponenziale: $\frac{3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 1$

- $3^{2x} + 9 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^{2x} = 3$ Sommando otteniamo:
- $7 \cdot 3^{2x} = 3$
- $3^{2x} = \frac{3}{7}$ che, risolta utilizzando i logaritmi:
- $2x = \log_3 \frac{3}{7}$ e, quindi
- $x = \frac{1}{2} \log_3 \frac{3}{7}$

3. Risolvere l'equazione esponenziale: $(2^{x-1})^x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8^{x+1}}$

utilizzando le proprietà delle potenze (vedi appendice), otteniamo:

- $2^{x^2-x} \cdot 2^{-2} = 8^{-x-1}$
- $2^{x^2-x-2} = (2^3)^{-x-1}$
- $2^{x^2-x-2} = 2^{-3x-3}$ dato che le basi sono uguali, possiamo uguagliare gli esponenti
- $x^2 - x - 2 = -3x - 3$ che è un'equazione di secondo grado in x
- $x^2 + 2x + 1 = 0$ le soluzioni sono quindi:
- $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

4. Risolviamo l'equazione: $2^x + 2^{3-x} = 6$.

- Osserviamo che: $2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}$
- L'equazione assegnata è equivalente a: $2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \Rightarrow \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$
- Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:
 $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

- Si vede chiaramente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x . Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria $z = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado: $z^2 - 6z + 8 = 0$) si ha:

$$2^x = 2 \quad x = 1 \quad \text{oppure}$$

$$2^x = 4 \quad x = 2$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivere le seguenti potenze sotto forma di radice:

a) $3^{\frac{5}{8}}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

2. Scrivere le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[4]{0.25}$;

3. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a) $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

b) $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

c) $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$

d) $3 \cdot 5^x = 7$ $\left[\log_5 \frac{7}{3} = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 5}\right]$

e) $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$ $[-1; 2]$

SOLUZIONI

1.a) $\sqrt[8]{3^5}$ b) $\sqrt[3]{4^2}$ c) $\sqrt[2]{\frac{1^3}{3}}$

2.a) $2^{\frac{5}{6}}$ b) $3^{\frac{5}{4}}$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

3.a) $\left[\frac{9}{2}\right]$ b) $[5/6]$ c) $[1]$ d) $\left[\log_5 \frac{7}{3} = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 5}\right]$

e) $[-1, 2]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Scrivere le seguenti potenze sotto forma di radice:

a) $2^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivere le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a. $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$	$\left[-\frac{1}{2}\right]$
b. $4^x = 2^x - 2$	[nessuna soluzione]
c. $3^x + 3^{1-x} = 4$	$[0; 1]$
d. $6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$	$\left[-1; -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$
e. $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$	$[-3; \log_2 3]$

FUNZIONE LOGARITMICA

Teoria in sintesi

- Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

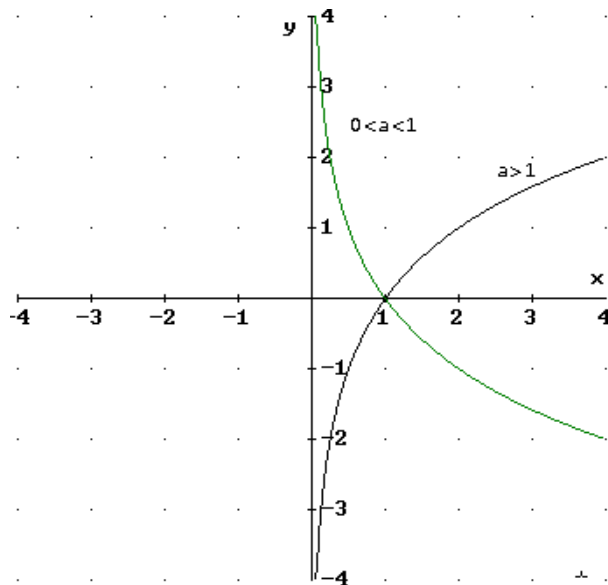
$$y = \log_a x, \text{ con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}^+$$

- La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.
- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è \mathbf{R}^+ ;
- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è \mathbf{R} .

Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; i grafici che seguono illustrano il comportamento della funzione logaritmica $y = \log_a x$ nei due casi :



EQUAZIONI LOGARITMICHE

Teoria in sintesi

- Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.
- L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$\log_a x = b$$
 , con $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$; $x > 0$ è l'incognita dell'equazione.
- La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a A(x) = \log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi (vedi appendice)
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione:

$$5 \cdot 3^x = 7$$
 .
- Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

$$\log(5 \cdot 3^x) = \log 7$$
 .
- Appliciamo la proprietà 2) dei logaritmi: (appendice)

$$\log 5 + \log 3^x = \log 7$$
 .

- Appliciamo la proprietà 1) dei logaritmi:
 $\log 5 + x \cdot \log 3 = \log 7$.

- Isolando x otteniamo:

$$x = \frac{\log 7 - \log 5}{\log 3} \quad (*)$$

- In alternativa potevamo isolare 3^x , ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}$$

- Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

- $x = \log_3 \frac{7}{5} = \log_3 7 - \log_3 5$

- Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si ottiene (*).

2. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-2) = \log_3 x - 2$$

- Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

- cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

- Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = \log_3 3^2$:

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

- Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \Rightarrow x^2 - 11x - 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}$$

- Il valore $x = \frac{11 - \sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11 + \sqrt{157}}{2}$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

- $\log_2(x-1) = 3$
- $\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$
- $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$
- $\log_3(x-1) = \frac{1}{2} \log_3 x$

SOLUZIONI

a)[9] b)[\emptyset] c)[6] d) $\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

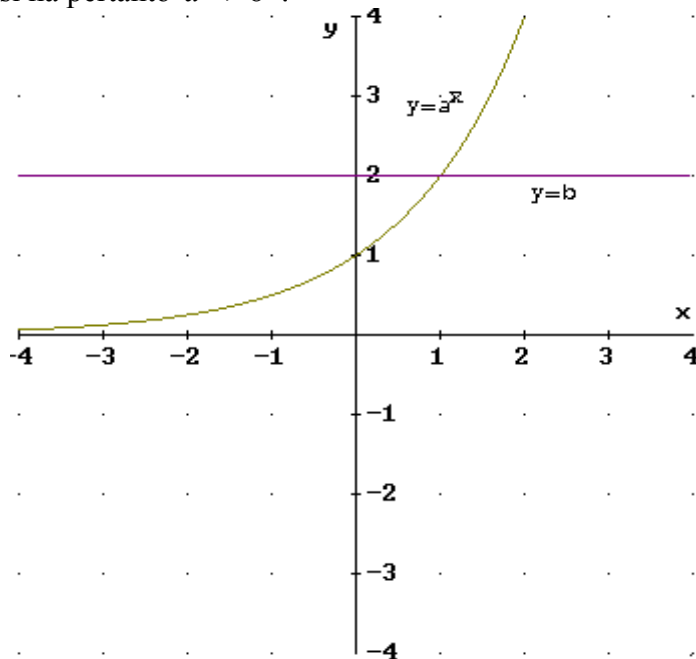
Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $\log(x-2) + \log 5 = \log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$
b) $\log(x-1) - 2 \cdot \log(x+1) - \log 8 = -2$ $\left[\frac{3}{2}; 9\right]$
c) $3 \log_9 x + \log_3 x = 10$ $[8]$
d) $2 \log_4 x + 2 \log_x 4 - 5 = 0$ $[2, 16]$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

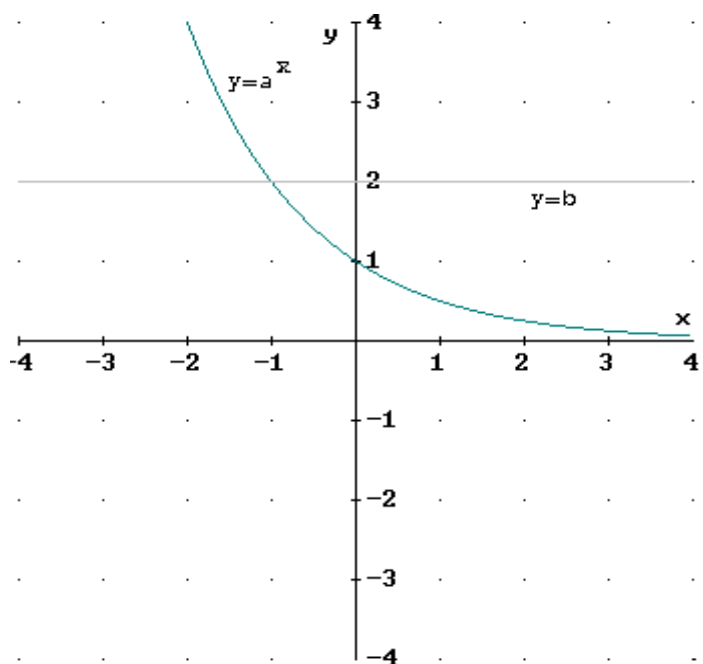
Teoria in sintesi

- Le disequazioni esponenziali si presentano nella forma: $a^x < b$ oppure $a^x > b$
- Risolvere queste disequazioni significa stabilire per quali valori di x la curva esponenziale si trova rispettivamente al di sotto o al di sopra della retta $y=b$:
- (1) Nel caso $a > 1$ si ha pertanto $a^x > b$:



e la disequazione risulta verificata per $x > \log_a b$.

- (2) $a^x < b$ se $x < \log_a b$
- (3) Nel caso $0 < a < 1$ abbiamo $a^x > b$ se:

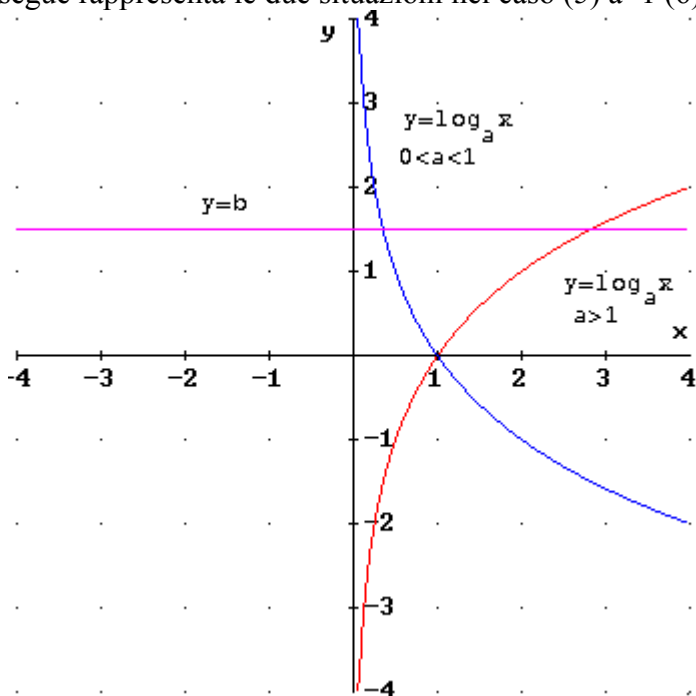


e la disequazione è verificata per $x < \log_a b$

- (4) $a^x < b$, se $x > \log_a b$
- notiamo che, nel caso $a > 1$, se $b < 0$ (e cioè la retta si trova nel semipiano delle ordinate negative), la disequazione $a^x < b$ non ammette soluzioni reali, mentre la disequazione $a^x > b$ è verificata per ogni valore reale di x

Un discorso analogo vale per le disequazioni logaritmiche $\log_a x > b$ oppure $\log_a x < b$

Il grafico che segue rappresenta le due situazioni nel caso (5) $a > 1$ (6) $0 < a < 1$



- notiamo che le disequazioni logaritmiche $\log_a x > b$ o $\log_a x < b$ hanno soluzioni solo positive ($x > 0$ per l'esistenza del logaritmo), mentre possono avere soluzioni per ogni valore reale di b

Esempi

Risolvere le disequazioni:

- $10^x > 25 \Rightarrow x > \log_{10} 25$
- $10^x > -10 \Rightarrow$ qualsiasi valore reale di x
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \Rightarrow x < 3$ (la base dell'esponenziale è minore di 1, caso (3) della teoria in sintesi)
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > 25$. La disequazione è definita per ogni $x \neq 0$. La scriviamo come $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ e,

poiché la base è minore di 1, otteniamo : $\frac{x+4}{x} < -2$. Risolvendola :

$$\frac{x+4}{x} < \frac{-2x}{x} \Rightarrow \frac{x+4+2x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{3x+4}{x} < 0 \Rightarrow N > 0 : x > -\frac{4}{3}, D > 0 : x > 0$$

da cui: $-\frac{4}{3} < x < 0$

- $\log_5 x < -10$
 $\Rightarrow x < 5^{-10}$ e, poiché $x > 0$ per l'esistenza del logaritmo, dovrà essere $0 < x < 5^{-10}$
- $\log_{\frac{1}{2}} x < 2 \Rightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ poiché la base del logaritmo è minore di 1 (caso (6) della teoria in sintesi)
- $\log_3(x+4) \geq \log_3(2x+3)$. Poniamo innanzitutto le condizioni di esistenza dei due logaritmi:

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ che, dovendo valere entrambe portano all'unica condizione: } x > -\frac{3}{2}.$$

Risolviamo ora la disequazione. Dato che la base è maggiore di 1, dovrà essere $x+4 \geq 2x+3$ che ha come soluzione $-x \geq -1$, cioè $x \leq 1$. Confrontando la soluzione ottenuta con le condizioni

poste, si ha la soluzione della disequazione logaritmica data: $-\frac{3}{2} < x \leq 1$

- $\log_2^2 x - 6 \log_2 x + 8 > 0$. Posto $y = \log_2 x$ e la condizione $x > 0$, si ottiene la disequazione $y^2 - 6y + 8 > 0$. Calcoliamo il $\Delta = 36 - 32 = 4$ e quindi le soluzioni sono:
 $y_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow y = 4$ e $y = 2$. Quindi la disequazione è verificata per $y < 2$ o $y > 4$.

Dato che $y = \log_2 x$, dobbiamo risolvere le due disequazioni $\log_2 x < 2 \Rightarrow x < 4$ e $\log_2 x > 4 \Rightarrow x > 16$. Poiché avevamo la condizione $x > 0$ posta sul logaritmo, le soluzioni sono: $0 < x < 4$ e $x > 16$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le disequazioni:

- $2^{x+7} + 4 > 0$
- $\frac{2^x - 1}{8 - 2^x} > 0$
- $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$
- $(0.2)^{(x+1)^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+x^2}$
- $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$

$$f. \log_{10} x - 1 > \frac{2}{\log_{10} x}$$

$$g. \log_3^2 x - 4 \log_3 x + 3 < 0$$

SOLUZIONI

a. qualsiasi valore reale di

b. $0 < x < 3$

c. $1 < x < 3$

d. $x < 1/4$

e. $x > 2/3$ f. $1/10 < x < 1$; $x > 100$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

$$1. \quad 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} > 1 \quad \left[x > \log_2 \frac{2}{7} \right]$$

$$2. \quad 1 - 5^{x^2} \geq 0 \quad [0]$$

$$3. \quad \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{2}{5^{1-x}} > \frac{3}{5} \quad [x < 0]$$

$$4. \quad \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 2) \quad [x > 2]$$

$$5. \quad \sqrt{\log_{10} x} < 1 \quad [1 < x < 10]$$

APPENDICE

ESPONENZIALI

1. proprietà delle potenze. Le proprietà delle potenze valgono per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a \mathbf{R} vale :

1. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

LOGARITMI

1. *Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base $a > 0$, deve essere $b > 0$, inoltre valgono i casi particolari: $\log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$; $\log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.*

2. Proprietà dei logaritmi. Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

- 1) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$ ($x > 0$; $a > 0$);
- 2) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ ($x > 0$; $y > 0, a > 0$);
- 3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ ($x > 0$; $y > 0, a > 0$);
- 4) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a, b, c > 0$); formula di cambiamento di base nei logaritmi.

3. *I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure in base $a = e \approx 2,718$: $\log x$ indica il $\log_{10} x$, detto anche logaritmo decimale; $\ln x$, indica il $\log_e x$, detto anche logaritmo naturale o neperiano.*