Funzioni elementari: funzioni potenza

Lezione per Studenti di Agraria
Università di Bologna

Funzioni lineari

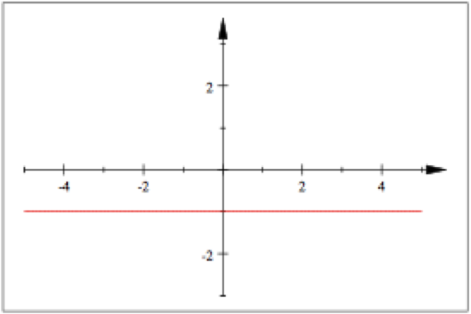
Come abbiamo già visto, studiando le funzioni reali, ci sono funzioni elementari che servono, attraverso somma, prodotto, quoziente, inversa e composizione ad ottenere altre funzioni che descrivono fenomeni da studiare.

Funzioni lineari

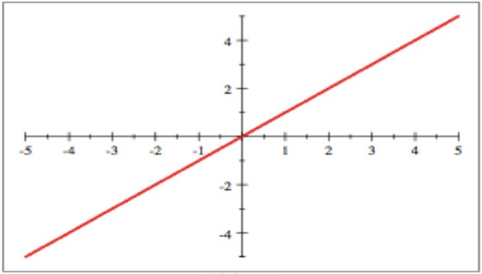
Come abbiamo già visto, studiando le funzioni reali, ci sono funzioni elementari che servono, attraverso somma, prodotto, quoziente, inversa e composizione ad ottenere altre funzioni che descrivono fenomeni da studiare.

La prima funzione che abbiamo considerato è la funzione costante

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = k \ ;$$



Un'altra funzione elemetare che abbiamo visto è la funzione identità:



$f(x) = x$

Attraverso la somma e il prodotto di qurste due funzioni si ottiene una generica funzione lineare

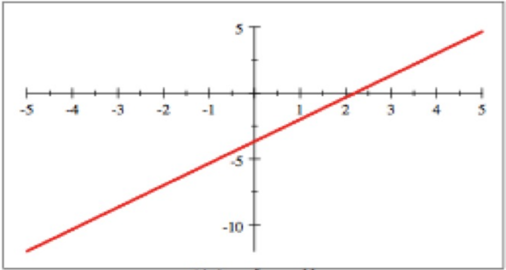
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; f(x) = ax + b$$

cioè una funzione il cui grafico è una linea retta.

Quindi, se f è una funzione lineare, individuata dalle costanti a e b, a è l'inclinazione della linea e $(0, b)$ è il punto di intersezione della linea con l'asse delle ordinate.
Poichè due punti determinano una retta, ne consegue che l'equazione di una funzione lineare può essere determinata conoscendo i valori corrispondenti a due punti.

Quindi, se f è una funzione lineare, individuata dalle costanti a e b, a è l'inclinazione della linea e $(0,b)$ è il punto di intersezione della linea con l'asse delle ordinate.
Poichè due punti determinano una retta, ne consegue che l'equazione di una funzione lineare può essere determinata conoscendo i valori corrispondenti a due punti.
Ad esempio, supponiamo di sapere che f è una **funzione lineare** e che $f(1) = -2$ e $f(4) = 3$.
Ne consegue che i punti $(1,-2)$ e $(4,3)$ si trovano sul grafico della funzione.
Si calcola la pendenza della retta, cioè $\frac{3-(-2)}{4-1} = \frac{5}{3}$.
Così, $a = \frac{5}{3}$.Per scoprire il valore di b, si ha che $f(x) = (\frac{5}{3})x + b$.
Così, quando $x = 1$, $f(1) = (\frac{5}{3})\cdot 1 + b$ cioè $-2 = \frac{5}{3} + b$, da cui ne consegue che $b = -\frac{11}{3}$.
Pertanto, l'equazione della funzione è $f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$.

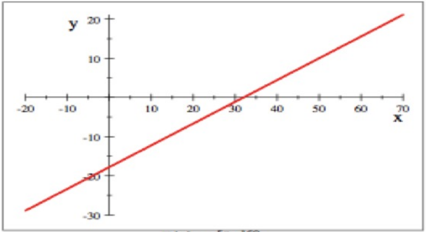
Naturalmente si può anche cercare l'equazione della retta tra i due punti del grafico e esprimere la variabile y in funzione della variabile x, ottenendo così la funzione cercata



$f(x) = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$

Un esempio tratto dalla fisica è dato dalla funzione T che converte i gradi Fahrenheit in gradi Celsius .
Dato che $T(98,6) = 37$ e $T(32) = 0$, troviamo l'equazione della funzione T.

Un esempio tratto dalla fisica è dato dalla funzione T che converte i gradi Fahrenheit in gradi Celsius .
Dato che $T(98,6) = 37$ e $T(32) = 0$, troviamo l'equazione della funzione T.
La pendenza è data da $a = \frac{T(98,6)-T(32)}{98,6-32} = \frac{37-0}{98,6-32} = \frac{37}{66.6}. = \frac{370}{666} = \frac{5}{9}$
Pertanto, $T(x) = \frac{5}{9}x + b,$. Per trovare il valore di b, usiamo il fatto che $T(32) = 0$ e otteniamo $T(32) = \frac{5}{9}(32) + b = 0,$. Così, $b = -\frac{160}{9}$. Pertanto,



$T(x) = \frac{5x-160}{9}$.

Se ci chiediamo quando $T(x) \geq 0$ ossia quando $T(x) = \frac{5x-160}{9}. \geq 0$, troviamo che questo è verificato quando $x \geq 32$ cioè nell'intervallo: $[32, \infty)$: esattamente quando la funzione assume valori positivi, ossia quando $f(x)$ si trova nel primo o secondo quadrante.
Analogamente avremo che $T(x) < 0$, quando $f(x)$ si trova nel terzo o quarto quadrante, cioè per $x < 32$ ovvero nell'intervallo $(-\infty, 32)$.

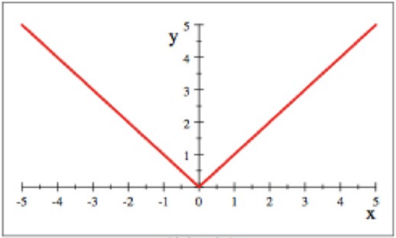
Funzione valore assoluto

Un'altra a funzione di grande utilità è la *funzione valore assoluto:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = |x|$$

Tale funzione è definita come segue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$



$f(x) = |x|$

La funzione valore assoluto ha $\mathbb{R}$ come dominio e $[0, +\infty)$ come immagine.
E' una funzione pari, strettamente crescente in $[0, +\infty)$ strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.

La funzione valore assoluto ha $\mathbb{R}$ come dominio e $[0, +\infty)$ come immagine. E' una funzione pari, strettamente crescente in $[0, +\infty)$ strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.

Gode delle seguenti proprietà:

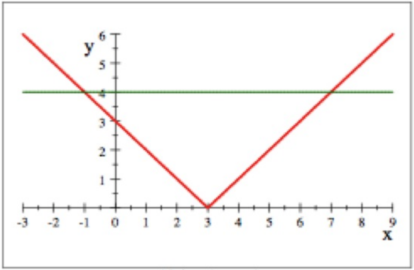
1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ se e soltanto se $x = 0$
3. $|-x| = |x|$ (funzione pari)
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Per ogni numero reale $r \geq 0$ valgono le seguenti equivalenze: (Verificarle sul grafico della funzione)

1. $|x| \leq r$ se e solo se $-r \leq x \leq r$
2. $|x| < r$ se e solo se $-r < x < r$
3. $|x| \geq r$ se e solo se $x \leq -r$ oppure $x \geq r$
4. $|x| > r$ se e solo se $x < -r$ oppure $x > r$

Risolviamo l'equazione $|x-3|=4$, questo significa $x-3=4$, se $x-3\geq 0$ $(x=7)$ oppure $-(x-3)=4$, se $x-3<0$. Questo significa $x=-1$.

Risolviamo l'equazione $|x-3|=4$, questo significa
$x-3=4$, se $x-3\geq 0$ $(x=7)$ oppure
$-(x-3)=4$, se $x-3<0$. Questo significa $x=-1$.
Risolviamo usando il grafico la disequazione $|x-3|\leq 4$.:



$f(x)=|x-3|$

si ha immediatamente che è verificata nell'intervallo $[-1,7]$, mentre
$|x-3|>4$, è verificata negli intervalli $(-\infty,-1)\cup(7,\infty)$

Se si vuole risolvere la disequazione analiticamente, $|x-3| \leq 4$ è equivalente alla doppia disequazione $-4 \leq x-3 \leq 4$
ossia occorre risolvere il sistema:

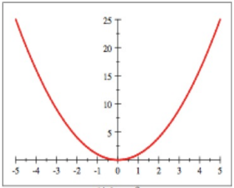
$$\begin{cases} x-3 \leq 4 \\ x-3 \geq -4 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq -1 \end{cases}$$ e quindi l'intervallo $[-1,7]$

Funzione quadrato

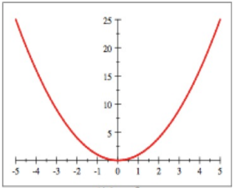
Un'altra funzione che abbiamo già incontrato è la *funzione quadrato*



$f(x) = x^2$

Funzione quadrato

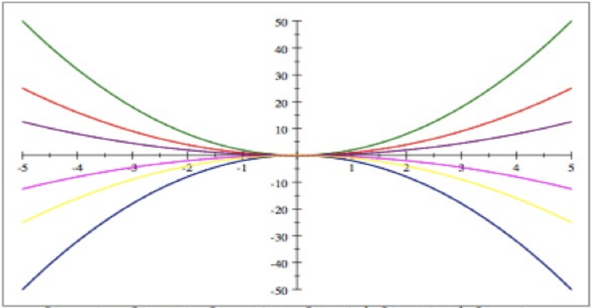
Un'altra funzione che abbiamo già incontrato è la *funzione quadrato*



$f(x) = x^2$

Come la funzione valore assoluto la funzione $f(x) = x^2$ ha $\mathbb{R}$ come dominio e $[0, +\infty)$ come immagine; è una funzione pari, strettamente crescente in $[0, +\infty)$ strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.

Le funzioni $f(x) = ax^2$ (con $a \neq 0$) si ottengono dal grafico precedente moltiplicando per a l'ordinata di ogni punto.
Si noti che se $a < 0$ la concavità della funzione cambia.
Nel grafico seguente abbiamo le funzioni: $f(x) = ax^2$ per alcuni valori di a



$x^2(rosso), -x^2(giallo) 2x^2(verde), -2x^2(bleu), \frac{1}{2}x^2(viola), -\frac{1}{2}x^2(rosa)$

Se operiamo sulla funzione $f(x) = ax^2$ una traslazione orizzontale e una verticale in modo generico otteniamo una funzione quadratica, cioè

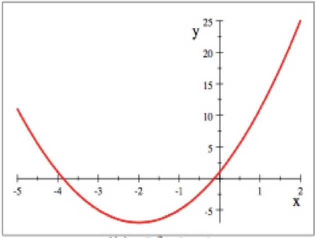
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ,con } a \neq 0.$$

Il grafico di una funzione quadratica è una parabola. il suo dominio è $\mathbb{R}$.
La parabola così ottenuta ha la concavità verso l'alto (convessa) se $a > 0$ e ha la concavità verso il basso (concava) se $a < 0$,come nel caso $f(x) = ax^2$, infatti tramite una traslazione orizzontale e una verticale non si operano simmetrie rispetto all'asse delle ascisse .
Il grafico ottenuto è simmetrica alla retta verticale $x = -\frac{b}{2a}$
Il vertice del grafico ha coordinare
$x = -\frac{b}{2a}, .y = f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = c - \frac{b^2}{4a}$

Disegnamo ad esempio il grafico della funzione quadratica

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 1.$$

La parabola ha la concavità verso l'alto, poichè $a = 2$, . Il vertice della parabola ha ascissa pari a $-\frac{b}{2a} = -2$. L'ordinata del vertice è $f(-2) = -7$. Così, -7 è il minimo della funzione e l'immagine di f. è $[-7, \infty)$
Gli zeri di una funzione sono i valori in cui la funzione vale 0.



$f(x) = 2x^2 + 8x + 1$

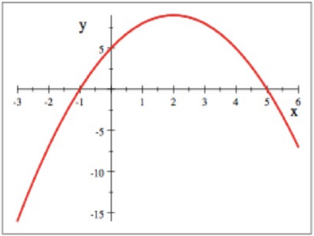
Se cerchiamo gli zeri di una funzione quadratica, la formula risolutiva è:
Se $ax^2+bx+c=0$, con $a\neq 0$, allora

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

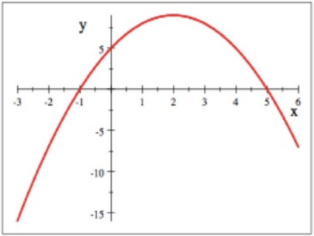
Se $b^2-4ac<0$, l'equazione non ha soluzioni reali (Nel campo complesso questa equazione ha sempre soluzione).
Gli zeri della funzione $f(x)=2x^2+8x+1$ sono
$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-(4)(2)(1)}}{2(2)}=\frac{-8\pm\sqrt{56}}{4}=\frac{-8\pm 2\sqrt{14}}{4}=-2\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Se ci chiediamo quando $2x^2+8x+1\leq 0$, possiamo osservare che la disuguaglianza è verificata per tutti i valori di x, per cui $f(x)\leq 0$, come si vede immediatamente questo succede nell'intervallo
$\left[-2-\frac{1}{2}\sqrt{14},-2+\frac{1}{2}\sqrt{14}\right]$.
Se ci chiediamo invece quando $2x^2+8x+1>0$ dal grafico della funzione desumiamo immediatamente che questo si verifica nell'unione dei due intervalli intervalli
$\left(-\infty,-2-\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)\cup\left(-2+\frac{1}{2}\sqrt{14},+\infty\right)$.

Consideriamo ora la funzione quadratica $f(x) = -x^2 + 4x + 5$



Consideriamo ora la funzione quadratica $f(x) = -x^2 + 4x + 5$



L'ascissa del vertice è 2, e la sua ordinata
è $f(2) = 9$.
Dal momento che gli zeri sono -1 e 5, e $a = -1 < 0$, il grafico risulta quello sopra disegnato. In questo caso avremo
$-x^2 + 4x + 5 \geq 0$ per $-1 \leq x \leq 5$, cioè nell'intervallo $[-1, 5]$, mentre
$-x^2 + 4x + 5 < 0$, per $x < -1$o per $x > 5$, cioè in $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

Funzioni potenza

Abbiamo ora studiato la funzione potenza $f(x) = x^2$; abbiamo dato precedentemente la definizione di potenza con esponente reale e abbiamo osservato che valgono sempre le seguenti le proprietà:

Funzioni potenza

Abbiamo ora studiato la funzione potenza $f(x) = x^2$; abbiamo dato precedentemente la definizione di potenza con esponente reale e abbiamo osservato che valgono sempre le seguenti le proprietà:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $0 < a < b \Rightarrow a^x < b^x$
4. $x < y,\ a > 1 \Rightarrow a^x < a^y$
5. $x < y, 0 < a < 1 \Rightarrow a^x > a^y$

Ora studieremo i grafici di tutte le funzioni potenza $f(x) = x^{\alpha}$ nei vari casi in cui α può presentarsi.
Si noti che in una funzione potenza generica la variabile è la base, mentre l'esponente è fisso
Studiamo ora le funzioni potenza con esponente intero positivo $n \geq 0$:

$$f(x) = x^n$$

Abbiamo già visto i casi $n = 0, 1, 2$.

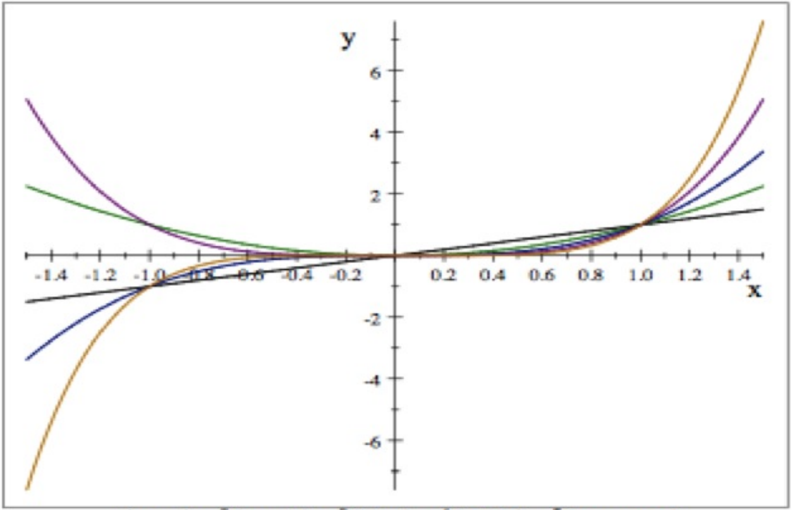
Abbiamo già visto i casi $n = 0, 1, 2$.
Come si osserva facilmente, le funzioni potenza con esponente *pari* sono pari infatti godono della proprietà:

$$f(-x) = f(x)$$

perché $(-1)^n = 1$se n è pari e quindi $(-x)^n = (-1)^n x^n = x^n$.
Il loro grafico è pertanto simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
Analogamente le funzioni potenza con esponente *dispari* sono dispari perchè godono della proprietà

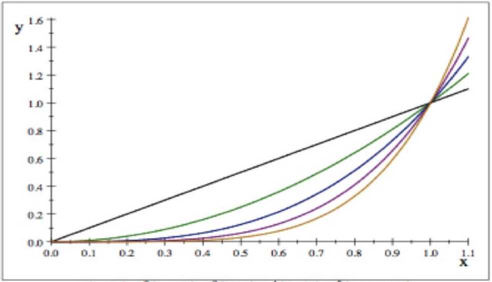
$$f(-x) = -f(x)$$

perché$(-1)^n = -1$ se n è dispari e $(-x)^n = (-1)^n x^n = -x^n$.
Il loro grafico è simmetrico rispetto all'origine.
Il caso $n = 0$ $f(x) = x^0 = 1$,è la funzione costante di valore 1.



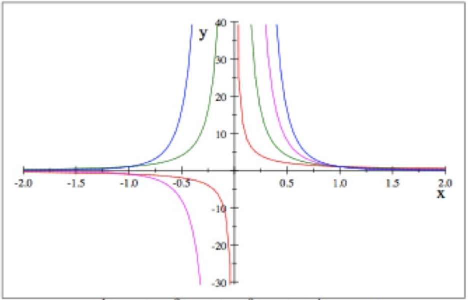
$x(nero), x^2(verde), x^3(bleu), x^4(viola), x^5(marrone)$

Nei casi $n > 0$,si osservi che, , se $0 < x < 1$, i grafici delle funzioni potenza si avvicinano all'asse delle ascisse al crescere dell'esponente, mentre, se $x > 1$, i grafici crescono sempre più velocemente al crescere dell'esponente. Osserviamo il grafico delle stesse funzioni nell'intervallo $[0, 1.1]$,per confrontare i comportamenti delle varie funzioni



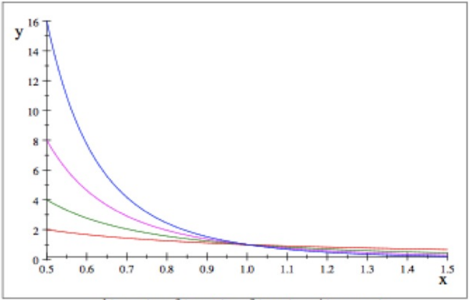
$x(nero), x^2(verde), x^3(bleu), x^4(viola), x^5(marrone)$

Esaminiamo ora i grafici delle funzioni potenza $f(x) = x^k$, $k < 0$, intero. Si possono ripetere le considerazioni già fatte nel caso di esponente positivo circa parità, disparità e simmetrie del grafico.



$x^{-1}(rosso), x^{-2}(verde), x^{-3}(rosa), x^{-4}(azzurro)$

Se $x > 1$, i grafici sono sempre più vicini all'asse delle ascisse tanto più l'esponente è piccolo (si ricordi che $-4 < -3$), mentre se $0 < x < 1$ i grafici si approssimano all'asse delle ascisse tanto più quanto più l'esponente è vicino a 0.
Osserviamo il grafico delle stesse funzioni nell'intervallo $[0.5, 1.5]$,per confrontare i comportamenti delle varie funzioni



$x^{-1}(rosso), x^{-2}(verde), x^{-3}(rosa), x^{-4}(azzurro)$

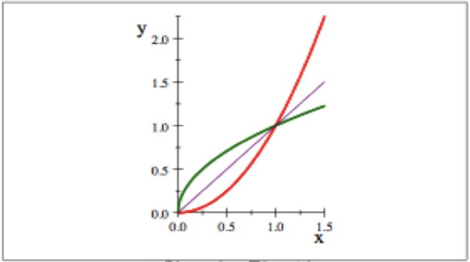
Vediamo ora come definire la potenza x^a nel caso in cui a sia razionale.

Vediamo ora come definire la potenza x^a nel caso in cui a sia razionale. Iniziamo con il caso $a = \frac{1}{n}$. In questo caso come abbiamo già visto e ispiriandoci alla proprietà *2*.

Vediamo ora come definire la potenza x^a nel caso in cui a sia razionale. Iniziamo con il caso $a = \frac{1}{n}$. In questo caso come abbiamo già visto e ispiriandoci alla proprietà *2*.
Se vogliamo che tale proprietà valga per la coppia di esponenti n e $\frac{1}{n}$ dovrà essere $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^1 = a$ e $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$, cioè l'elevamento a potenza $\frac{1}{n}$ dovrà essere, l'operazione inversa dell'elevamento alla potenza n; in altre parole l'estrazione della radice n-sima.

Vediamo ora come definire la potenza x^a nel caso in cui a sia razionale. Iniziamo con il caso $a = \frac{1}{n}$. In questo caso come abbiamo già visto e ispiriandoci alla proprietà *2*.
Se vogliamo che tale proprietà valga per la coppia di esponenti n e $\frac{1}{n}$ dovrà essere $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a^1 = a$ e $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$, cioè l'elevamento a potenza $\frac{1}{n}$ dovrà essere, l'operazione inversa dell'elevamento alla potenza n; in altre parole l'estrazione della radice n-sima.
Vi è però un problema, che può essere evidenziato nel caso $n = 2$.
L'elevamento al quadrato produce sempre un numero positivo o nullo, dunque solo di un numero di questo tipo si potrà estrarre la radice quadrata, ma c'è un altro problema: se $x \neq 0$, esistono due numeri distinti che producono lo stesso quadrato, x e$-x$, questo l'elevamento al quadrato non è un'operazione iniettiva da $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty)$ e di conseguenza non è invertibile a meno che non restringa il suo dominio.

Ci sono due modi ragionevoli per farlo: limitarsi ai numeri negativi o nulli o limitarsi ai numeri positivi o nulli. Per (comoda) convenzione l'estrazione di radice quadrata è l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato, ristretto all'insieme dei numeri reali ≥ 0; quindi $\sqrt{4} = 2$ (e non $\pm\, 2$).



$x^2(rosso)$, $\sqrt{x}(verde)$

Si osservi che se si restringe l'operazione di elevamento al quadrato ai numeri reali negativi, l'operazione inversa, dovendo portare a numeri negativi, è $g(x) = -\sqrt{x}$. Il precedente discorso può essere ripetuto senza alcuna variazione, quando n è pari, mentre non vi è alcun problema, quando n è dispari, essendo inquesto caso la potenza ennesima iniettiva.

Quindi nel caso $n = 2$ si considera la funzione

$$f(x) = x^2 \text{ con } f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$$

e la sua funzione inversa

$$g(x) = \sqrt{x} \text{ con } g : [0, +\infty) \to [0, +\infty),$$

mentre nel caso $n = 3$ si considera la funzione

$$f(x) = x^3 \text{ con } \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

e la sua funzione inversa

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \text{ con } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

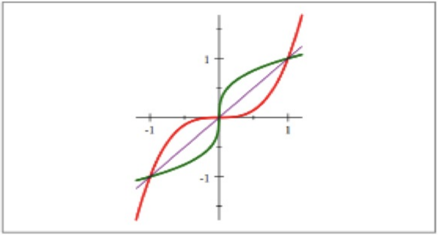
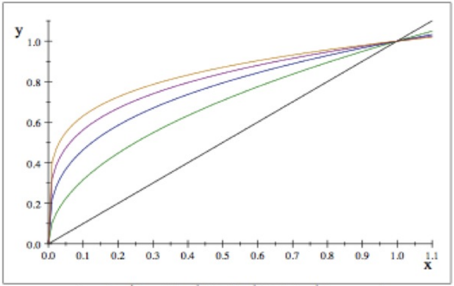


Figure 1: x^3(*rosso*), $\sqrt[3]{x}$(*verde*)

Ricordiamoci che il grafico della funzione inversa si ottiene a partire da quello della funzione di partenza tramite una simmetria rispetto alla diagonale del primo e terzo quadrante;

Ricordiamoci che il grafico della funzione inversa si ottiene a partire da quello della funzione di partenza tramite una simmetria rispetto alla diagonale del primo e terzo quadrante;
Per completezza, come abbiamo fatto per le funzioni potenza ad esponente positivo, confrontiamo i grafici delle funzioni radice, quindi delle funzioni potenza $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, al variare di n.



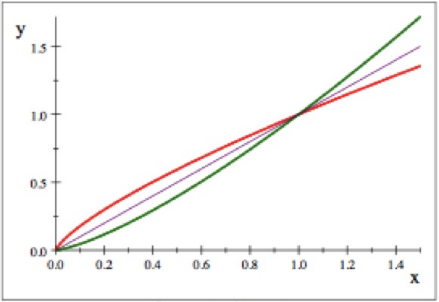
$x(nero), x^{\frac{1}{2}}(verde), x^{\frac{1}{3}}(bleu), x^{\frac{1}{4}}(viola), x^{\frac{1}{5}}(marrone)$

Sempre in accordo con la proprietà *2,* si definisce come abbiamo già visto, x^a nel caso in cui $a = \frac{m}{n}$, come $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, limitandosi a considerare valori di x positivi (vogliamo considerare tutti i possibili denominatori sia pari che dispari) e a positivo.
Anche in questo caso si ha che l'inversa della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è la funzione $g(x) = x^{\frac{n}{m}}$, con $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, infatti $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^{\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}} = x$, mentre $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$.

Sempre in accordo con la proprietà *2*, si definisce come abbiamo già visto, x^a nel caso in cui $a = \frac{m}{n}$, come $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$, limitandosi a considerare valori di x positivi (vogliamo considerare tutti i possibili denominatori sia pari che dispari) e a positivo.
Anche in questo caso si ha che l'inversa della funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è la funzione $g(x) = x^{\frac{n}{m}}$, con $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, infatti $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x^{\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}} = x$, mentre $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$.
In generale si ha che se $\frac{m}{n} > 0$ la funzione $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ è convessa (concavità rivolta verso l'alto), mentre se $\frac{m}{n} < 0$ la funzione è concava (concavità rivolta verso il basso).

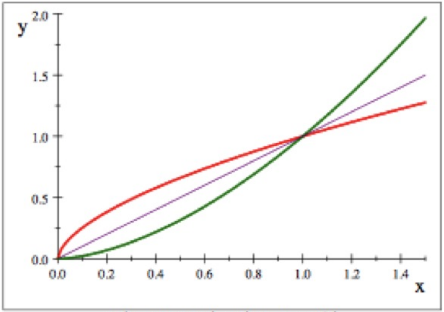
Si può ora dare il grafico della funzione $f(x) = x^a$ con a numero reale positivo, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Anche in questo caso per la proprietà *2*, l'inversa di $f(x) = x^a$ è $f(x) = x^{\frac{1}{a}}$

Si può ora dare il grafico della funzione $f(x) = x^a$ con a numero reale positivo, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$. Anche in questo caso per la proprietà *2*, l'inversa di $f(x) = x^a$ è $f(x) = x^{\frac{1}{a}}$



$x^{\frac{3}{4}} (rosso), x^{\frac{4}{3}} (verde)$

Concludiamo disegnando il grafico delle funzioni $f(x) = x^a$, con $a < 0$, $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.Anche in questo caso per la proprietà *2*, l'inversa di $f(x) = x^a$ è $f(x) = x^{\frac{1}{a}}$.
L'andamento è il seguente:



$x^a(a < 1, rosso), x^a(a > 1, verde)$