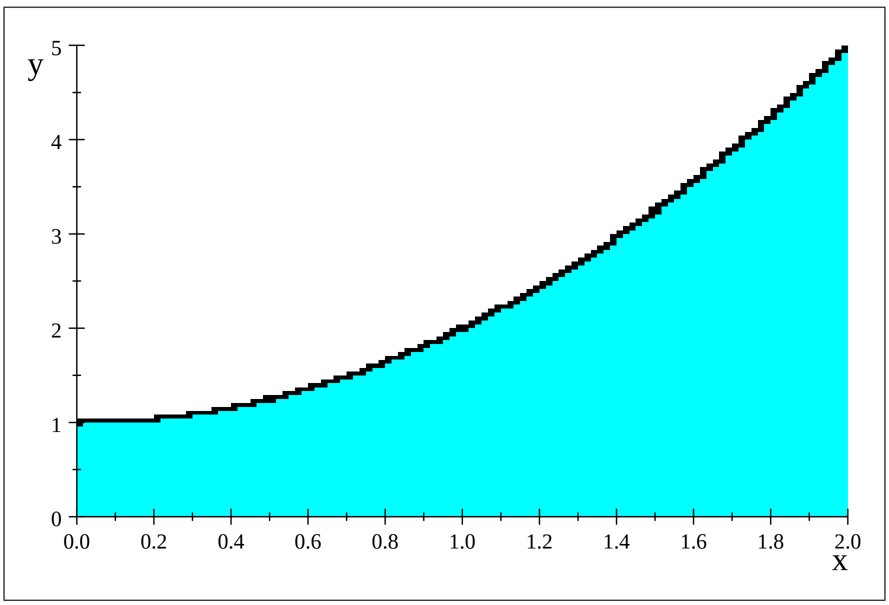
Integrali definiti.

Il problema di calcolare l'area di una regione piana delimitata da grafici di funzioni si può risolvere usando l'integrale definito.
L' integrale definito sta al problema del calcolo di aree come l'equazione della retta tangente o il tasso di cambio sta al problema del calcolo delle derivate.

Il problema del calcolo di aree ci porterà alla definizione di integrale definito.

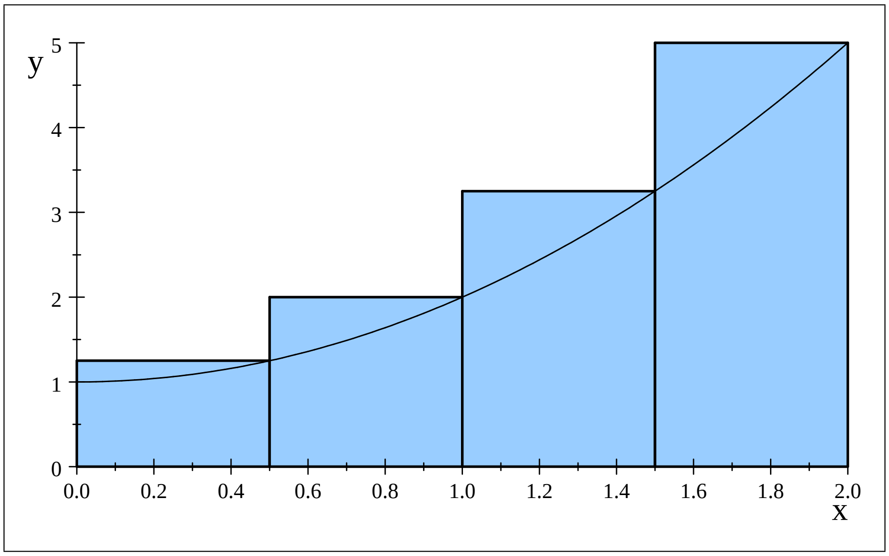
Per iniziare supponiamo di avere una funzione positiva $f : [a, b] \to \mathbf{R}$. Vogliamo determinare l'area della regione tra il grafico la funzione e l'asse x.
Per fare questo esaminiamo il seguente esempio. Calcoliamo l'area compresa tra il grafico della funzione $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$; $f(x) = x^2 + 1$ e l'asse delle ascisse

In altre parole, vogliamo determinare l'area della regione colorata sotto in azzurro:



Per calcolare l'area della zona azzurra dividiamo l'intervallo in n sottointervalli ciascuno di larghezza, $\frac{b-a}{n}$
Quindi in ogni intervallo si può formare un rettangolo la cui altezza è dato dal valore della funzione in un punto dell' intervallo. Possiamo quindi trovare l'area di ciascuno di questi rettangoli, sommarli e questa sarà una approssimazione dell'area.

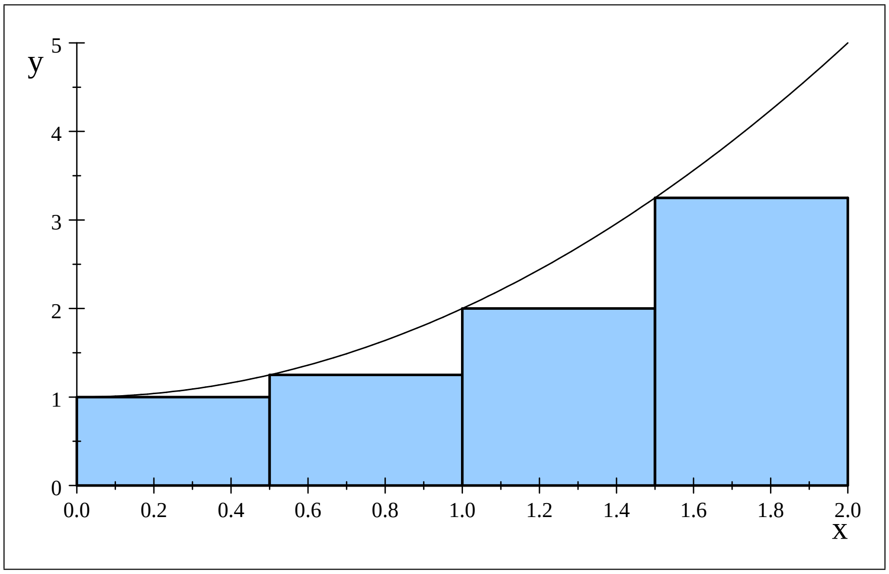
Nell'esempio sopra dato, ora dividiamo l'intervallo in 4 sottointervalli e consideriamo la funzione nel punto finale per definire l'altezza del rettangolo.



Avremo in questo caso un'approssimazione per eccesso In primo luogo, la larghezza di ciascuno dei rettangoli è $0,5$, mentre l'altezza di ogni rettangolo è determinato dal valore in funzione non è altro che il valore assunto dalla funzione nel punto finale dell'intervallo. Quindi l'area della regione azzurra è:

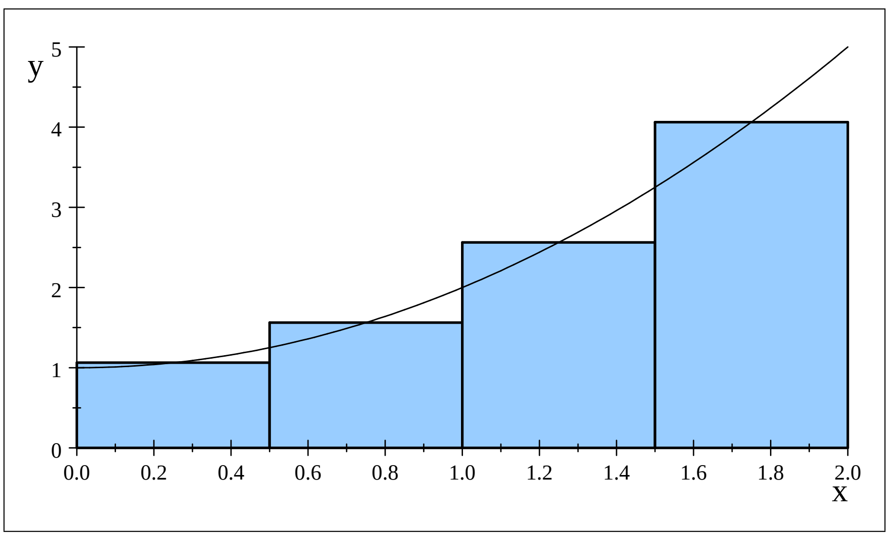
$$A_u = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2}\frac{5}{4} + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}\frac{13}{4} + \frac{1}{2}5 = 5,75$$

Se prendiamo il punto iniziale dell'intervallo come punto per calcolare le altezze dei rettangoli si avrà il seguente grafico e la seguente approssimazione per difetto:



$$A_d = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}\frac{5}{4} + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}\frac{13}{4} = 3,75$$

Invece di usare i punti estremi di ciascuna intervallo potremmo prendere il punto medio di ogni subintervallo . Ecco il grafico:



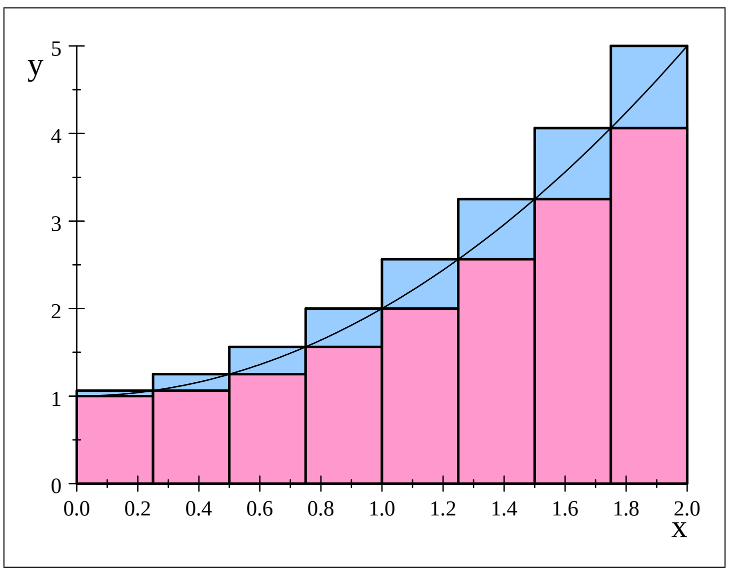
In questo caso abbiamo:

$$Am = \frac{1}{2}f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{5}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{7}{4}) = \frac{1}{2}\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\frac{25}{16} + \frac{1}{2}\frac{41}{16} + \frac{1}{2}\frac{65}{16} = 4,625$$

Ora abbiamo tre stime. Per confronto l'area esatta è

$$Am = \frac{14}{3} = 4.\overline{6}$$

Il modo più semplice per ottenere una migliore approssimazione è di aumentare il numero delle suddivisioni. se raddoppiamo il numero di rettangoli otteniamo:



.

$$A_d = 4,1875 \qquad A_u = 4,65625$$

Quindi, l'aumento di n numero delle suddivisioni dell'intervallo ha fatto aumentare l'accuratezza delle stime.

Nell'esempio abbiamo usato tre modi diversi di sceglierie il punto dell'intervallo coriispondente all'altezza del subintervallo.

Se consideriamo funzioni continue, un modo naturale di fare questa scelta è quello di scegliere i punti di minimo e di massimo in ogni subintervallo.

Con la prima scelta avremo un'approssimazione per difetto dell'area e nel secondo caso un'approssimazione per eccesso.

In ogni caso, sempre considerando una funzione positiva e continua, con l'aumento del numero di suddivisioni dell'intervallo otterremo due classi contigue di numeri reali,

A_d (approssimazioni per difetto) e A_u (approssimazioni per eccesso) tali che il sup $A_d =$ inf A_ue tale numro sarà l'area dellaregione piana considerata.

Diamo ora la definizione di **integrale definito**.

Sia f :$[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$, con i punti $a = x_o < x_1 < ...... < x_n = b$ in n sottointervalli uguali,

$[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2..., n)$, tutti di ampiezza $\frac{b-a}{n}$.

.

Se indichiamo con M_i e con m_i rispettivamente il massimo ed il minimo di f in $[x_{i-1}, x_i]$, le somme

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$ $\qquad$ $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$

sono dette somma superiore e somma inferiore relative alla suddivisione fatta e forniscono rispettivamente un'approssimazione per eccesso e una per difetto della misura che vogliamo calcolare.

Al crescere di n, si ottengono scomposizioni in cui cresce il numero di intervalli e decresce l'ampiezza.

Si può dimostrare che, per n $\rightarrow \infty$, le somme superiori S_n e le somme inferiori s_n convergono allo

stesso numero che è *l'integrale definito di* f *su* $[a, b]$ e viene indicato con il simbolo

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

$\int\limits_a^b f(x)dx$ è la misura con segno della regione di piano sottesa al grafico di f su $[a, b]$.

Si osservi che l'integrale definito non coincide in generale con l'area di tale regione. Questo accade solo se

$f(x) \geq 0$ su $[a, b]$. Per ottenere l'area, bisogna considerare l'integrale di $|f(x)|$

cioè

$\int\limits_a^b |f(x)|dx=$ Area della regione di piano sottesa al grafico di f su $[a, b]$.

- Proprietà degli integrali definiti:

- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

- $\int\limits_a^b k\ f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ (per ogni numero reale k)

- $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$

- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ dove $a < c < b$

- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ la variabile di integrazione nell'integrale definito è una variabile muta

- $\int\limits_a^b cdx = c(b-a)$

- Se $f(x) \geq 0$ per $a \leq x \leq b$ allora $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$

- Se $m \leq f(x) \leq M$ per $a \leq x \leq b$ allora $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

- $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Calcolo dell'integrale definito

Sia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Consideriamo, per ogni $x \in [a,b]$, l'integrale

$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

dipende da x e quindiè una funzione di x. Tale funzione è detta *funzione integrale di f*.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (di Torricelli-Barrow)

Sia $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ la sua funzione integrale allora

F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Quindi F è una primitiva di f, in particolare è la primitiva di f che vale 0 in a.

Corollario: (*formula fondamentale del calcolo integrale)*

Se G è una primitiva di f, si ha che $F(x) = G(x) + c$ da cui, per $x = a$, otteniamo $c = -G(a)$.

Quindi, per$x = b : F(b) = G(b) - G(a)$, cioè, tenendo conto della definizione di F:

$\int\limits_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$

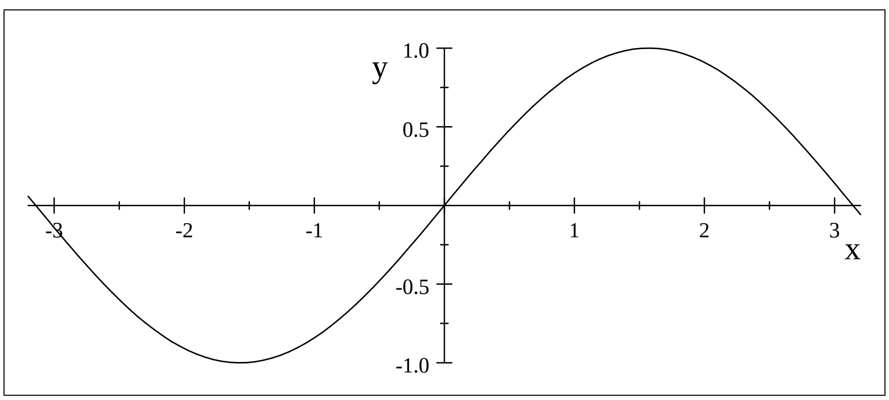
dove G è una primitiva qualunque di f su $[a, b]$.

Esempi:

$\int \sin xdx = -\cos x + c$ quindi

$\int\limits_0^\pi \sin xdx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$

$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos\frac{\pi}{2} = 0$



Formula di integrazione per sostituzione

Quando si usa la formula di integrazione per sostituzione negli integrali definiti, cioè ci si avvale di una variabile ausiliaria $u = g(x)$,non è necessario ritornare alla variabile originaria, ma si può utilizzare direttamente la formula:

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

1. **Esempi**

- $\int\limits_{-2}^{0} 2t^2\sqrt{1-4t^3}dt$

  Ponendo $\quad u = 1-4t^3$ si ha $du = -12t^2dt$ e $t^2dt = -\frac{du}{12}$

  inoltre per $\quad t=-2,\ u=33 \quad$ e per $\quad t=0,\ u=1$. Quindi

  $\int\limits_{-2}^{0} 2t^2\sqrt{1-4t^3}dt = -\frac{1}{6}\int\limits_{33}^{1} u^{\frac{1}{2}}du = \left[-\frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=33}^{u=1} = \frac{11}{3}\sqrt{33}-\frac{1}{9}$

- $\int\limits_{-1}^{5} (1+w)(2w+w^2)^5dw$

  Ponendo $\quad u = 2w+w^2$ si ha $du = 2(1+w)dw$; inoltre per $w=-1$ $u=-1$e per $w=5 \quad u=35$. Quindi

  $\int\limits_{-1}^{5} (1+w)(2w+w^2)^5dw = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{35} u^5du = \frac{1}{2}\left[u^6\right]_{u=-1}^{u=35} = 153\,188\,802$

- $\int\limits_{-2}^{6} (\frac{4}{(1+2x)^3} - \frac{5}{1+2x})dx = \int_{-3}^{13}\left(-\frac{1}{2u^3}\left(5u^2-4\right)\right)du$

  Ponendo $\quad u = 1+2x \quad$ si ha $du = 2dx$; inoltre per $x=-2 \quad u=-3$e per $x=6 \quad u=-11$. Quindi$\int -\frac{1}{2u^3}\left(5u^2-4\right) = -\frac{1}{2u^2}\left(5u^2\ln u+2\right) = -\frac{5}{2}\ln u - \frac{1}{u^2} =$

  $\int\limits_{-2}^{6} (\frac{4}{(1+2x)^3} - \frac{5}{1+2x})dx = \int_{-3}^{13}\left(-\frac{1}{2u^3}\left(5u^2-4\right)\right)du = \frac{1}{2}\int_{-3}^{13}(\frac{2}{u^3}-\frac{5}{2u})du =$
  $\left[-\frac{5}{2}\ln|u| - \frac{1}{u^2}\right]_{u=-3}^{u=13} = \frac{5}{2}\ln 3 - \frac{5}{2}\ln 13 + \frac{160}{1521}$

- $\int\limits_{e^2}^{e^6} \frac{(\ln t)^4}{t}dt$

  Ponendo $\quad u = \ln t$ si ha $du = \frac{1}{t}dt$; inoltre per $t=e^2 \quad u=\ln(e^2)=2 \quad$ e per $t=e^6 \quad u=\ln(e^6)=6$. Quindi

  $\int\limits_{e^2}^{e^6} \frac{(\ln t)^4}{t}dt = \int\limits_{2}^{6} u^4du = \frac{1}{5}\left[u^5\right]_{u=2}^{u=6} = \frac{7744}{5}$

Valor medio integrale

Il valore medio di una funzione f:$[a, b] \to \mathbf{R}$ nell'intervallo $[a, b]$ è dato da

$$f_m = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$$

è cioè il valore che assume una funzione costante su $[a, b]$ con lo stesso integrale di f.

Il concetto di media integrale è quindi una generalizzazione dell'idea di media aritmetica; si vuole calcolare il valore medio assunto da una funzione su un intervallo $[a, b]$

Teorema del valor medio integrale

Se f:$[a, b] \to \mathbf{R}$ è continua allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$ o equivalentemente,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

`Dimostrazione`

Essendo$f$ continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass essa è dotata di massimo M e di minimo m su $[a, b]$, quindi si avrà per ogni $x \in [a, b]$

$m \leq f(x) \leq M$

Dalla proprietà di monotonia dell'integrale risulta

$\int\limits_a^b mdx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b Mdx$

Quindi

$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

ovvero $\quad m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$

Ora dai teoremi sulle funzioni continue sappiamo che f assume in $[a, b]$ tutti i valori compresi tra m e M.

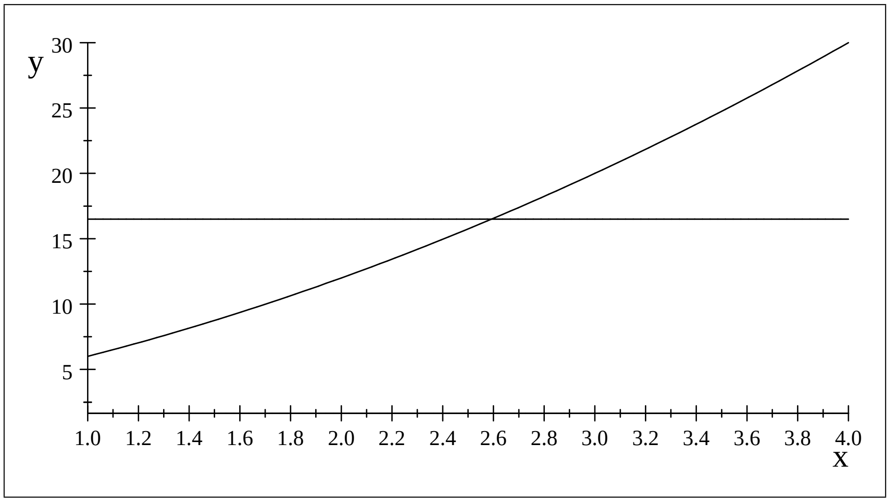
quindi in particolare esisterà un $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Esempi

1. Determinare il valor medio integrale e gli eventuali punti che soddisfano il teorema per le seguenti funzioni negli intervalli a fianco indicati:

1. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ in $[1, 4]$

$\int_1^4 (x^2 + 3x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{x=1}^{x=4} = \frac{99}{2}$, quindi il valor medio integrale è $\frac{\frac{99}{2}}{4-1} = \frac{33}{2}$.



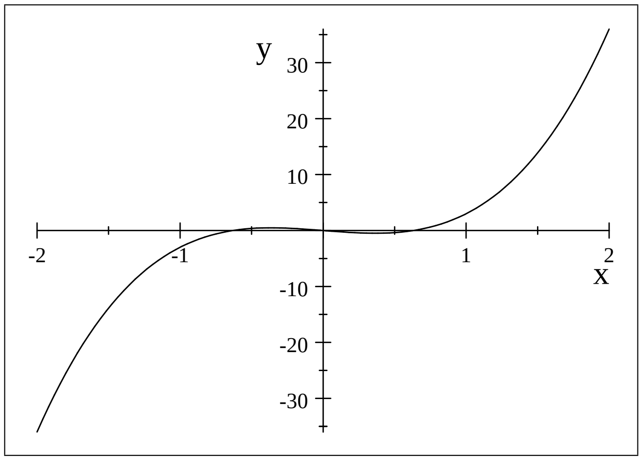
Cerchiamo dunque i punti c in $[1, 4]$ tali che $f(c) = c^2 + 3c + 2 = \frac{33}{2}$, si hanno due soluzioni $c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{67} - \frac{3}{2}, c_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{67} - \frac{3}{2}$; x_2 non appartiene a $[1, 4]$

Dunque l'unico punto in cui la funzione vale il valor medio integrale è $c_1 = \frac{1}{2}\sqrt{67} - \frac{3}{2}$.

2. $f(x) = 5x^3 - 2x$ in $[-2, 2]$

$\int_{-2}^{2} (5x^3 - 2x\ )dx = \left[\frac{5}{4}x^4 - x^2\right]_{x=-2}^{x=2} = 0$,quindi il valor medio integrale è 0.

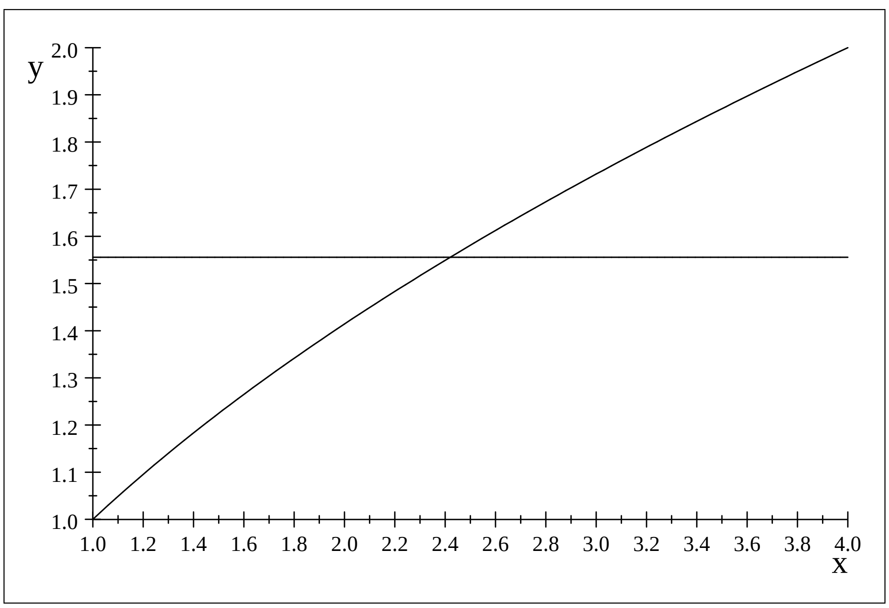
Cerchiamo i punti c in $[-2, 2]$ tali che $f(c) = 5c^3 - 2c = 0$, si ha $c = 0, c = \sqrt{\frac{2}{5}}, c = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ (tre soluzioni)



3. $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 4]$

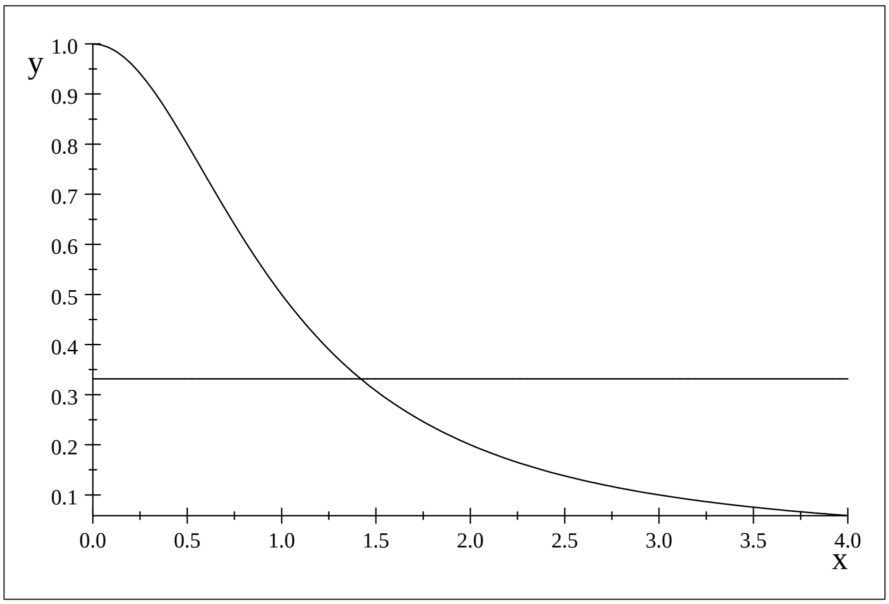
$\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=1}^{x=4} = \frac{14}{3}$ quindi il valor medio integrale è $\frac{\frac{14}{3}}{3-0} = \frac{14}{9}$

Cerchiamo dunque i punti c in $[0, 4]$ tali che $f(c) = \sqrt{c} = \frac{14}{9}$, Solution is: $\frac{196}{81}$, dunque $c = \frac{196}{81} = 2.4198$



1. **4.** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ in $[0, 4]$

$\int\limits_0^4 \frac{1}{x^2+1} \, dx = [\arctan x]_{x=0}^{x=4} = \arctan 4 - \arctan 0 = \arctan 4$,quindi il valor medio integrale è $\frac{\arctan 4}{4-0} = \frac{1}{4} \arctan 4 = 0.331\,45$



Cerchiamo dunque i punti c in $[0, 4]$ tali che $f(c) = \frac{1}{c^2+1} = \frac{1}{4} \arctan 4 = 0.331\,45$,

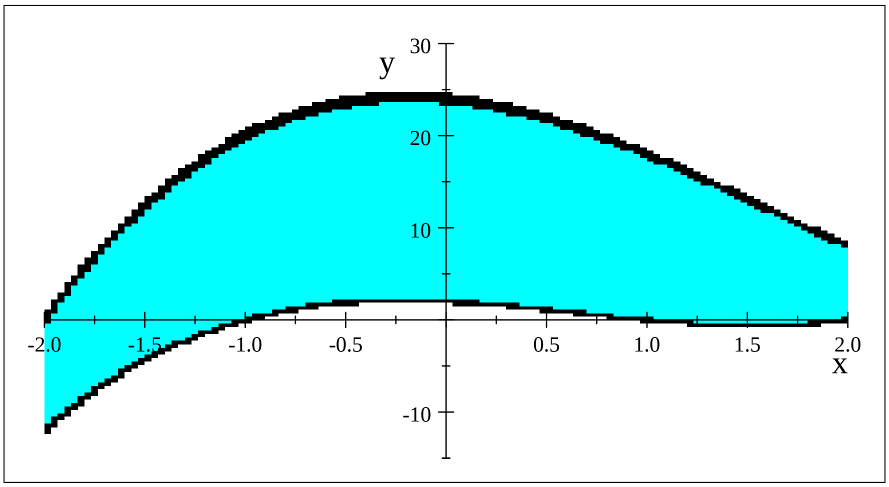
cioè : $c_1 = -\frac{1}{\sqrt{\arctan 4}} \sqrt{4 - \arctan 4}$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{\arctan 4}} \sqrt{4 - \arctan 4}$,

c_1 non appartiene all'intervallo $[0, 4]$,dunque l'unico punto in cui la funzione vale il valor medio integrale è

$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\arctan 4}} \sqrt{4 - \arctan 4}$

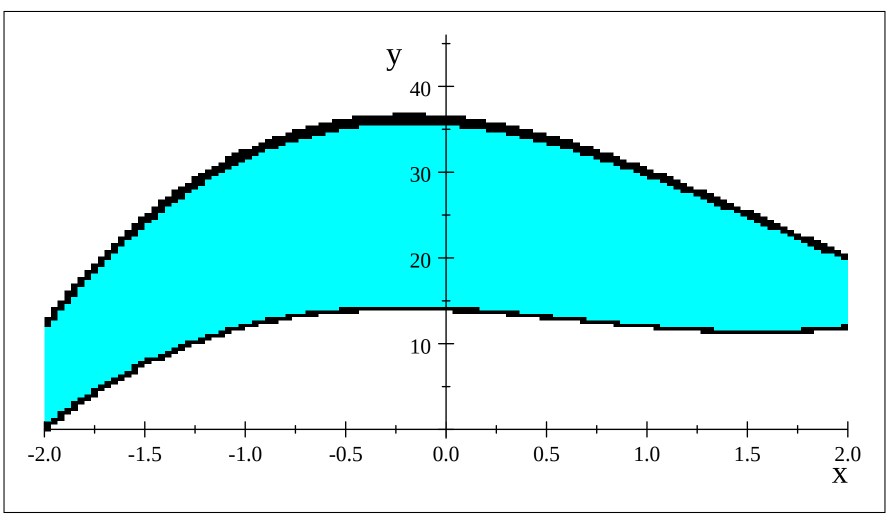
Calcolo di Aree tra i grafici di due funzioni

Consideriamo due funzionif, g:$[a, b] \to \mathbf{R}$, con $g(x) \leq f(x)$
vogliamo determinare l'area compresa tra il grafico di f e il grafico di g nell'intervallo $[a, b]$.



Se m_g è il minimo di g in $[a, b]$,l'area da calcolare è uguale a quella che si ottiene tra le funzioni $g(x) - m_g$ e $f(x) - m_g$.

Così operando si hanno due funzioni positive o nulle , infatti $m_g \leq g(x)$ e quindi $0 \leq g(x) - m_g \leq f(x) - m_g$.(il minimo di $g(x) - m_g$ è 0)



In questo caso l'area si trova come differenza tra $\int\limits_a^b (f(x) - m_g)dx$ e $\int\limits_a^b (g(x) - m_g)dx$ cioè

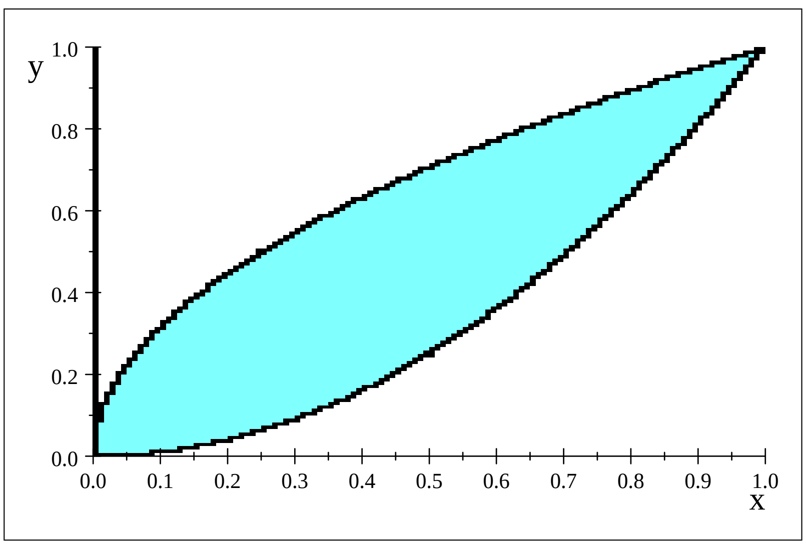
$A = \int\limits_a^b (f(x) - m_g)dx - \int\limits_a^b (g(x) - m_g)dx = \int\limits_a^b (f(x) - m_g - g(x) + m_g)dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$ dunque

$$A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Esempi

1. Determinare l'area della regione delimitata dalli grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$e $g(x) = x$

   Prima di tutto, solo che cosa si intende per "zona delimitata significa che la regione a cui siamo interessati a deve avere una delle due curve su ogni confine della regione. Pertanto, qui è un grafico delle due funzioni con l'allegata regione colorata.



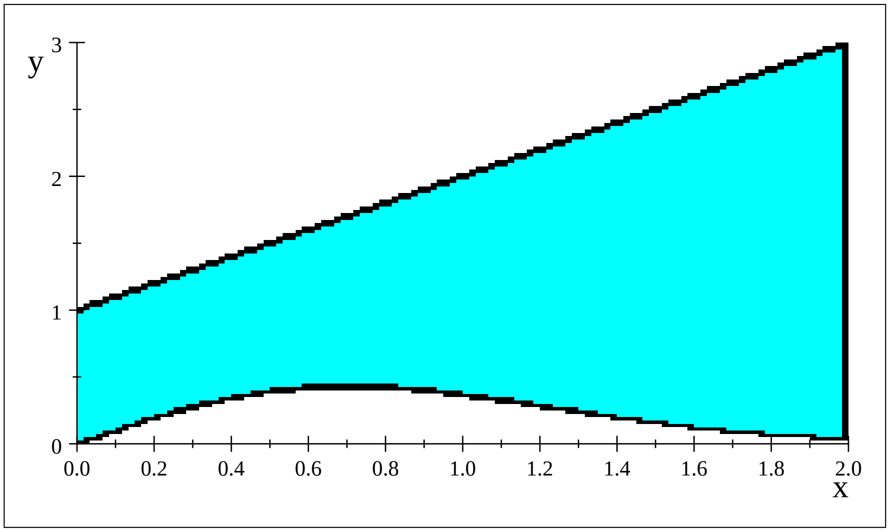
   Si noti che noi non prendiamo nessuna parte della regione a destra del punto di intersezione di questi due grafici $(1, 1)$. In questa regione la zona compresa tra i grafici non è limitata e così non fa parte della zona richiesta.

   $\int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$

2. Determinare l'area della regione delimitata dalle funzioni $f(x) = x + 1$, $g(x) = xe^{-x^2}$, la retta $x = 2$ e l'asse y.

   Si noti che in tale intervallo il punto di massimo per g in $[0, 2]$è $\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$(approssimato $0.428\,88$) nel punto $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.Essendo $\frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} < 1$ (minimo di f in in $[0, 2]$),

   si può concludere che $g(x) \leq f(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$.

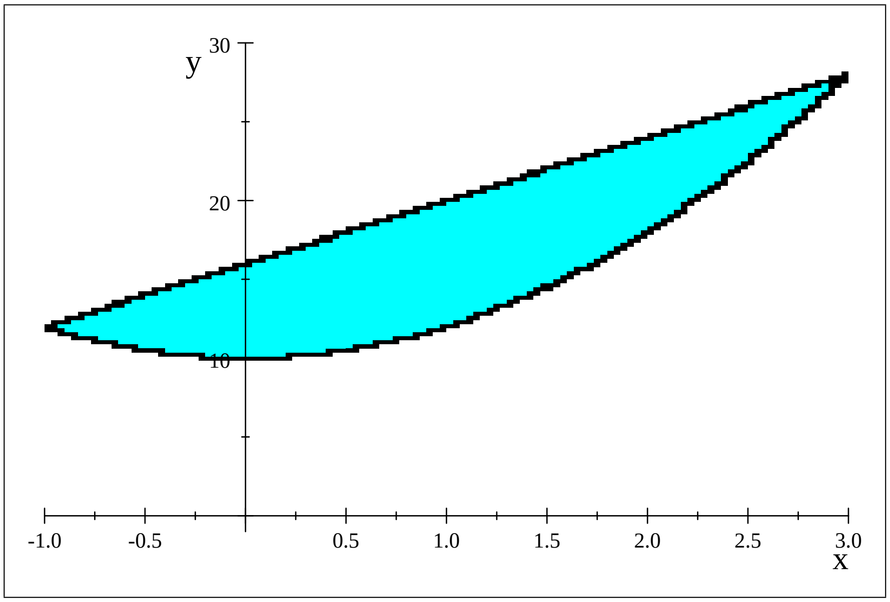
   .

   Pertanto l'area cercata è :$\int_0^2 (x + 1 - xe^{-x^2})dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{7}{2}$

3. Determinare l'area della regione delimitata dalle funzioni $f(x) = 4x + 16$, $g(x) = 2x^2 + 10$

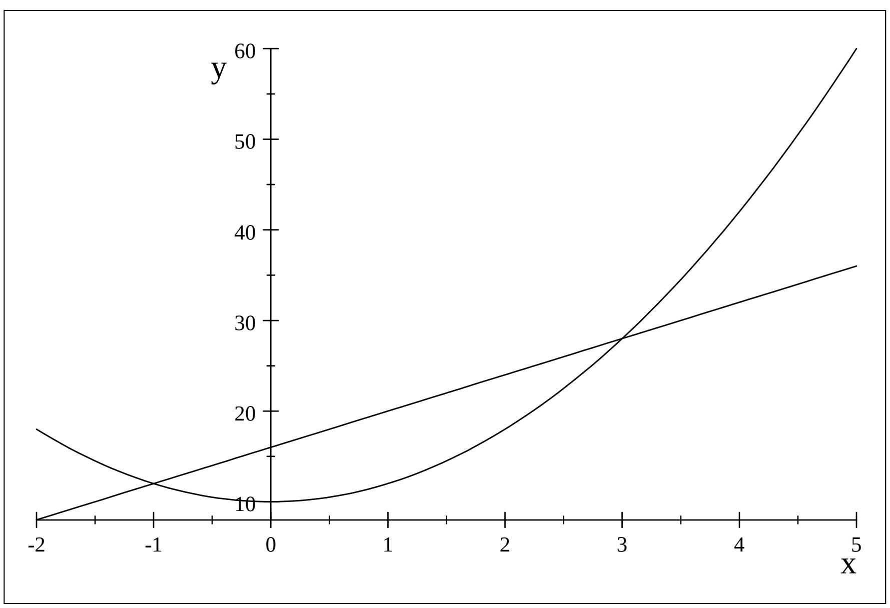
   Occorre prima trovare le intersezioni delle due curve, cioè i punti per cui $4x + 16 = 2x^2 + 10$, l'equazione ha due soluzioni$x = 3, -1$, quindi

   i due punti di intersezione delle due curve sono: $(3, 28)$ e $(-1, 12)$

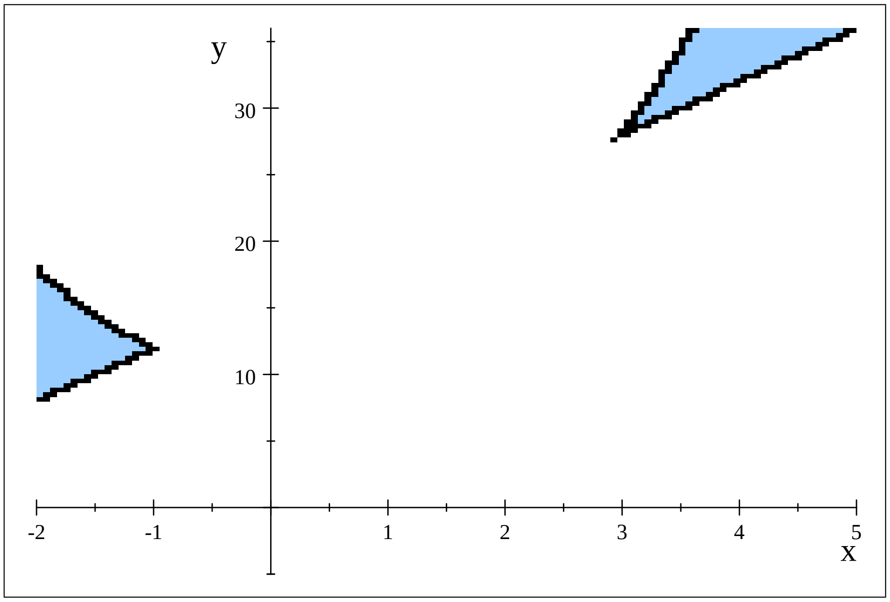


$$\int_{-1}^{3} (4x + 16 - (2x^2 + 10))dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right]_{x=-1}^{x=3} = \frac{64}{3}$$

4. Determinare l'area della regione delimitata dalle funzioni $f(x) = 4x + 16$, $g(x) = 2x^2 + 10$, $x = -2$ e $x = 5$



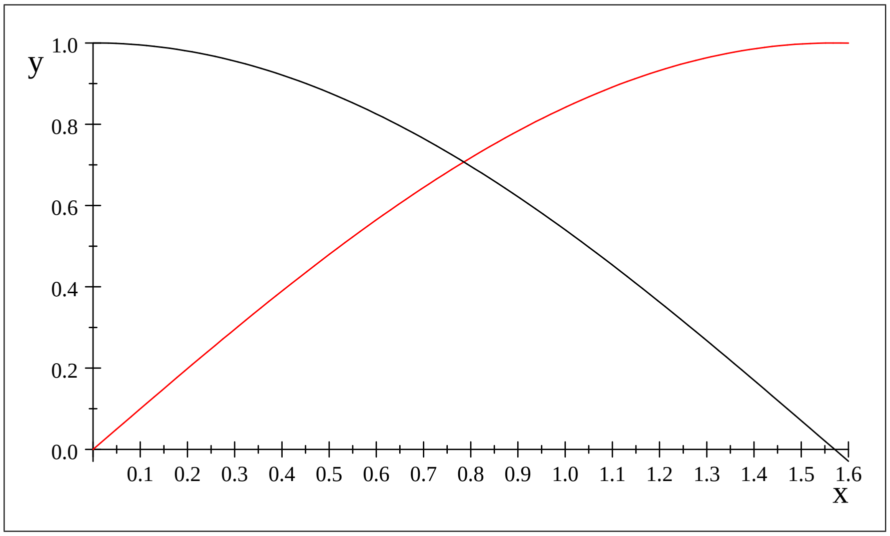
All'area della regione precedente dobbiamo aggiungere l'area colorata sotto

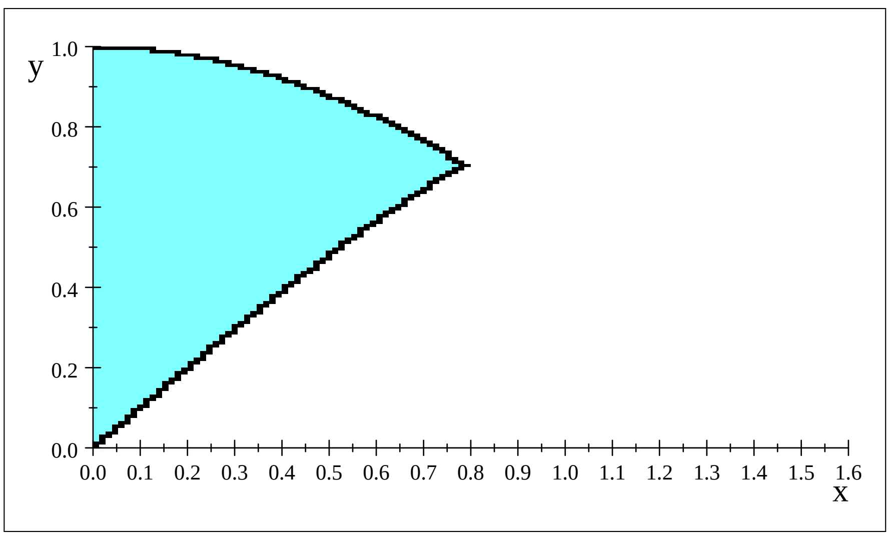


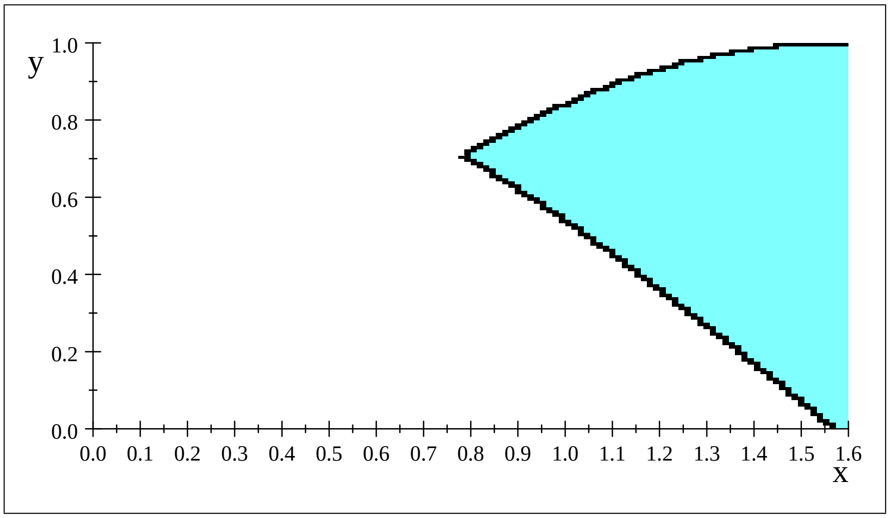
Si ha quindi

$\int_{-2}^{1}((2x^2+10)-4x+16)dx+\int_{-1}^{3}(4x+16-(2x^2+10))dx+\int_{3}^{5}((2x^2+10)-4x+16)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{x=-2}^{x=-1}+\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{x=-1}^{x=3}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{x=3}^{x=5}=\frac{142}{3}$

5. Determinare l'area della regione delimitata dalle funzioni $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\cos x$ le rette $x=\frac{\pi}{2}$ e asse y


y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6
x


y
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3 1.4 1.5 1.6
x



$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - 2$