

Limiti

Lezione per Studenti di Agraria
Università di Bologna

Esempi

- Sia $f(x) = 2x + 2$; calcoliamo $f(x)$ per x che assume valori vicini a 1. Per prima cosa, prendiamo in considerazione i valori di x a sinistra di 1 ($x < 1$).

x	f(x)
0.5	3
0.8	3.6
0.9	3.8
0.95	3.9
0.99	3.98
0.999	3.998
0.9999	3.9998
0.99999	3.99998

Consideriamo ora x che si avvicina a 1 da destra ($x > 1$).

\mathbf{x}	$\mathbf{f(x)}$
1.2	4.4
1.1	4.2
1.01	4.02
1.001	4.002
1.0001	4.0002
1.00001	4.00002

In entrambi i casi, come ci avviciniamo ad 1, $f(x)$ si avvicina a 4.
Intuitivamente, diciamo che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

- Sia $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ e calcoliamo $g(x)$ per x che assume valori vicini a 0. Come sopra studiamo i valori di $g(x)$, per $x < 0$ e per $x > 0$

x	g(x)
-0.5	0.9588
-0.2	0.993346
-0.01	0.998334
-0.001	0.999983
-0.0001	0.999999

x	g(x)
0.5	0.9588
0.2	0.993346
0.01	0.998334
0.001	0.999983
0.0001	0.999999

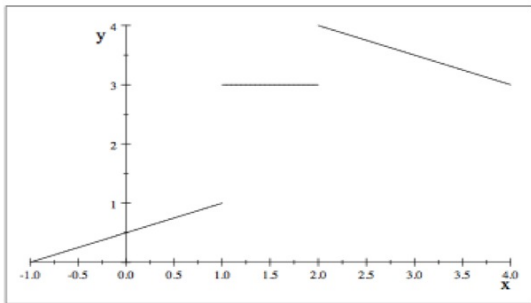
Diciamo che $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. Si noti che $g(0)$ non é definito.

- Nel grafico che segue, quando x si avvicina ad 1 da sinistra, $f(x)$ avvicina a 2 e questo può essere scritto come $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

Quando x si avvicina ad 1 da destra, $f(x)$ avvicina a 3: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

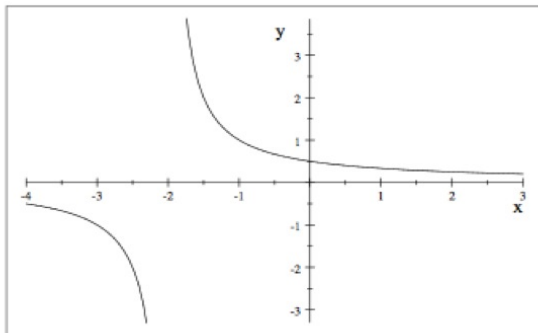
Quando x si avvicina ad 2 da sinistra, $f(x)$ avvicina a 3: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$

Quando x si avvicina ad 2 da destra, $f(x)$ avvicina a 4: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

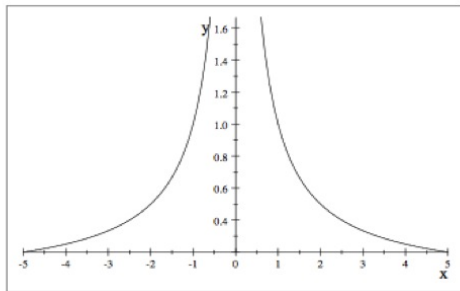


- Nel seguente esempio si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

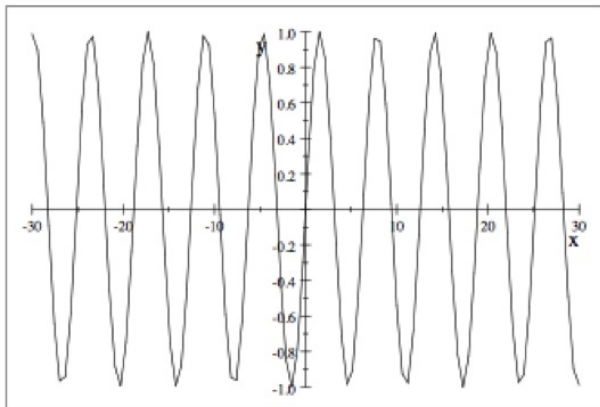


Se consideriamo la funzione $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

Consideriamo ora la funzione $f(x) = \sin x$ e consideriamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ o il $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ non esistono



Definizione di limite

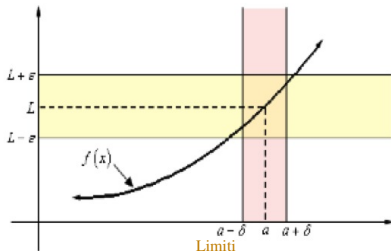
Definizione

Sia $f(x)$ è una funzione definita su un intervallo contenente a con l'eventuale esclusione di a .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, per ogni (numero positivo) $\varepsilon > 0$, esiste un (numero positivo) $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ ogni volta che $a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$.



Si noti, fissato ε , che vi sono in realtà un numero infinito di possibili δ , in effetti, trovato un δ , ogni altro numero positivo più piccolo del δ trovato va ancora bene.

Se si restringe ε si troverà un altro δ , ma la cosa importante è che ce ne sia sempre uno ogni volta che si fissa un $\varepsilon > 0$.

Esempi

Usiamo la definizione di limite per verificare i seguenti limiti:

① $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$;

Consideriamo $\varepsilon > 0$.

Dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \text{ quando } |x^2 - 0| < \delta \ (x \neq 0)$$

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \text{ equivale a } -\varepsilon < x < \varepsilon,$$

quindi in questo caso è sufficiente prendere $\delta = \varepsilon$.

② $\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 4 = 6$;

Consideriamo $\varepsilon > 0$.

Dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$|5x - 4 - 6| < \varepsilon \text{ quando } |x - 2| < \delta \ (x \neq 2)$$

$$|5x - 4 - 6| < \varepsilon \text{ cioè } |5x - 10| < \varepsilon, \text{ equivale a } -\frac{1}{5}\varepsilon + 2 < x < \frac{1}{5}\varepsilon + 2,$$

quindi in questo caso è sufficiente prendere $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$.

Limite destro

Definizione

- ① Sia $f(x)$ è una funzione definita su un intervallo destro di a (possiamo dire con precisione $(a, a + r)$, dove r è un numero reale positivo).

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

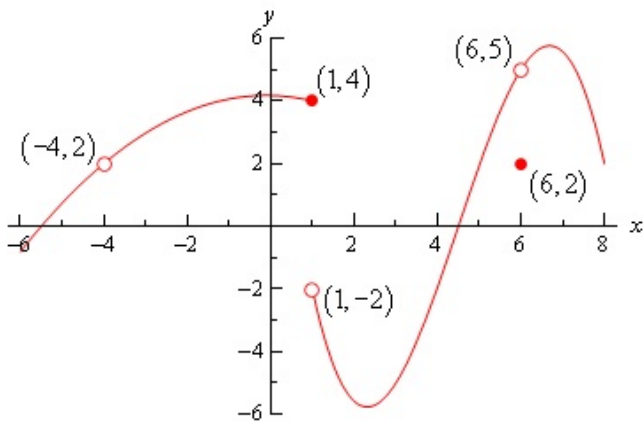
se per ogni se per ogni (numero positivo) $\varepsilon > 0$ esiste un (numero positivo) $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ ogni volta che $a < x < x + \delta$

- ② Sia $f(x)$ è una funzione definita su un intervallo destro di a (possiamo dire con precisione $(a - r, a)$, dove r è un numero reale positivo).

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

se per ogni se per ogni (numero positivo) $\varepsilon > 0$ esiste un (numero positivo) $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ ogni volta che $a - \delta < x < a$.

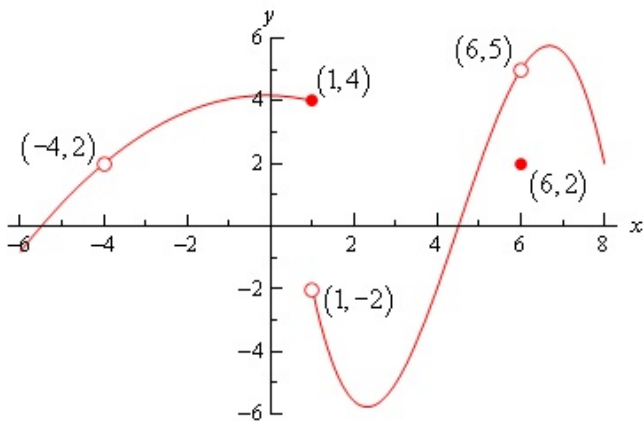


$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

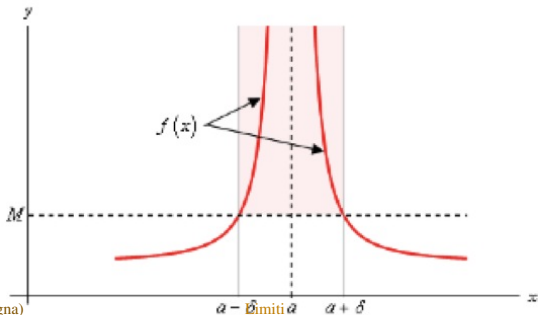
Segue immediatamente dalle definizioni che $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Limite infinito

Definizione

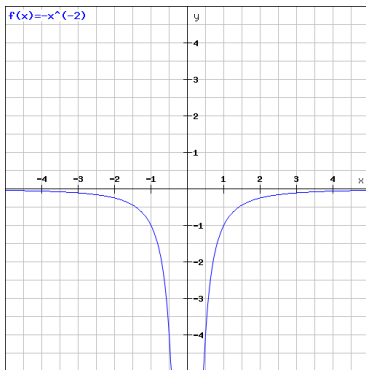
Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo contenente a con l'eventuale esclusione di a . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un (numero positivo) $\delta > 0$ tale che $f(x) > M$ ogni volta che $a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$



Analogamente si dice che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se per ogni $M < 0$ esiste un (numero positivo) $\delta > 0$ tale che $f(x) < M$ ogni volta che $a - \delta < x < a + \delta$ e $x \neq a$.



Esempio

Usiamo la definizione di limite per provare i seguenti limiti:.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

Consideriamo $M > 0$.

Dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $\frac{1}{x^2} > M$, quando $|x - 0| < \delta$ ($x \neq 0$)

La disequazione $\frac{1}{x^2} > M$ è verificata per gli x negli intervalli

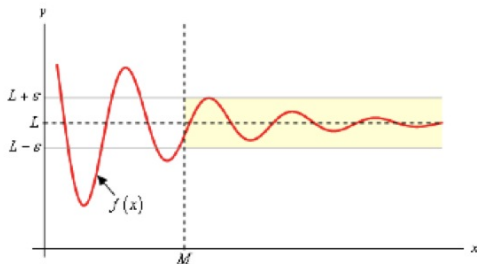
$\left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0\right) \left(0, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ quindi in questo caso è sufficiente prendere $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Definizione

Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo illimitato superiormente.
Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se per ogni ε (numero positivo) $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che
 $|f(x) - L| < \varepsilon$ ogni volta che $x > M$.



Analogamente si da le definizioni di

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Se $f(x)$ è una funzione definita su un intervallo illimitato superiormente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $N > 0$ esiste $M > 0$ tale che $f(x) > N$ ogni volta che $x > M$.

Analogamente si danno le definizioni per gli altri casi

Definizione

Una funzione si dice continua in un punto a del dominio di f , se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.

Poichè tutte le funzione elementare sono continua nel loro insieme di definizione possiamo calcolare immediatamente i limiti delle funzioni elementari in ogni punto del loro dominio, ad esempio:

1 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9;$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

3 $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8$

4 $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$

Calcolo dei limiti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in uno stesso intervallo I (limitato o non limitato) fatta eccezione al più per un punto $a \in I$ (con a eventualmente all'infinito).

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, con L e M numeri reali, allora

1 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L + M$

2 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L - M$

3 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

4 $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

5 Se $M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Se L e M sono ∞ valgono le seguenti regole

- $+\infty + M = +\infty$
- $-\infty + M = -\infty$
- $+\infty - \infty$ (forma indeterminata)
- $+\infty \cdot M = +\infty$ per $M > 0$
- $+\infty \cdot M = -\infty$ per $M < 0$
- $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ (vale la regola dei segni !)
- $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ (vale la regola dei segni !)
- $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ (vale la regola dei segni !)
- $\infty \cdot 0$ forma indeterminata
- $\frac{0}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{0} = \infty$ (occorre studiare il segno della funzione per stabilire il segno del risultato)
- $\frac{L}{\infty} = 0$
- $\frac{0}{0}$ forma indeterminata
- $\frac{\infty}{\infty}$ forma indeterminata

Forma indeterminata significa il limite considerato può assumere qualunque valore finito od infinito o non esistere come mostrano gli esempi

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione negativa})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione positiva})$$

Possiamo concludere che il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2}$$

Possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione negativa})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione positiva})$$

Possiamo concludere che il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2}$$

Possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ non esiste

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x^2 + 1) - x^2) = 1$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$