

# Limiti

Esempio 1: Sia  $f(x) = 2x + 2$  ; calcoliamo  $f(x)$  per  $x$  che assume valori vicini a 1. Per prima cosa, prendiamo in considerazione i valori di  $x$  a sinistra di 1 ( $x < 1$ ).

$x$	$f(x)$
0.5	3
0.8	3.6
0.9	3.8
0.95	3.9
0.99	3.98
0.999	3.998
0.9999	3.9998
0.99999	3.99998

Consideriamo ora  $x$  che si avvicina a 1 da destra ( $x > 1$ ).

$x$	$f(x)$
1.2	4.4
1.1	4.2
1.01	4.02
1.001	4.002
1.0001	4.0002
1.00001	4.00002

In entrambi i casi, come ci avviciniamo ad 1 ,  $f(x)$  si avvicina a 4.

Intuitivamente, diciamo che  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ .

Esempio 2: Sia  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$  e calcoliamo  $g(x)$  per  $x$  che assume valori vicini a 0. Come sopra studiamo i valori di  $g(x)$ , per  $x < 0$  e per  $x > 0$

$x$	$g(x)$	$x$	$g(x)$
-0.5	0.9588	0.5	0.9588
-0.2	0.993346	0.2	0.993346
-0.01	0.998334	0.01	0.998334
-0.001	0.999983	0.001	0.999983
-0.0001	0.999999	0.0001	0.999999

Diciamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ . Si noti che  $g(0)$  non é definito.

Esempio 3:

Nel grafico che segue, quando  $x$  si avvicina ad 1 da sinistra,  $f(x)$  avvicina a 2 e questo può essere scritto come

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

Quando  $x$  si avvicina ad 1 da destra,  $f(x)$  avvicina a 3:

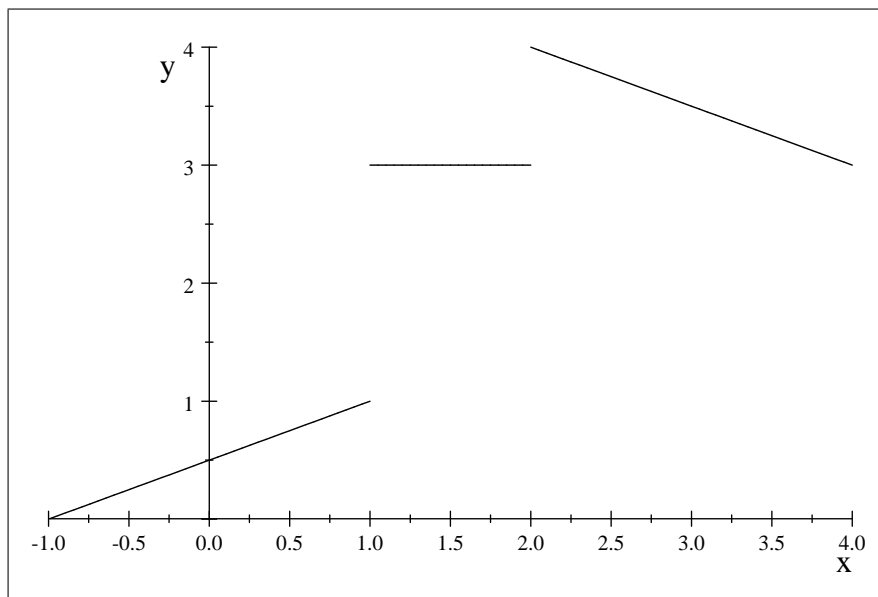
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

Quando  $x$  si avvicina ad 2 da sinistra,  $f(x)$  avvicina a 3 :

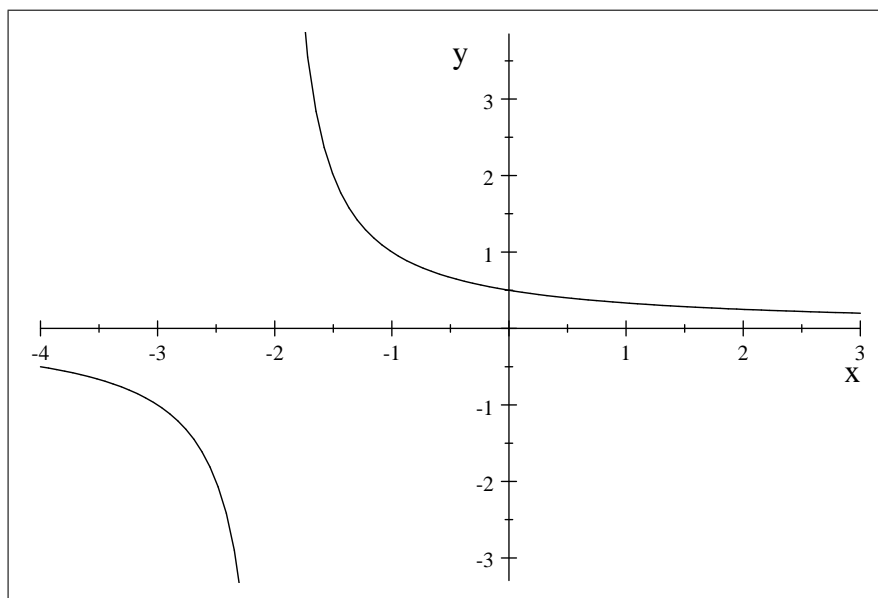
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

Quando  $x$  si avvicina ad 2 da destra,  $f(x)$  avvicina a 4 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

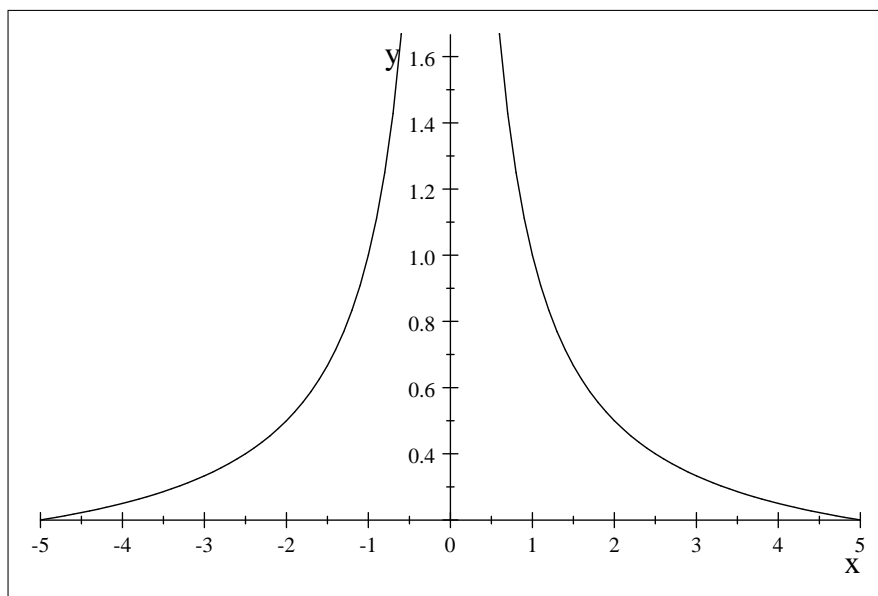


Nel seguente esempio abbiamo:



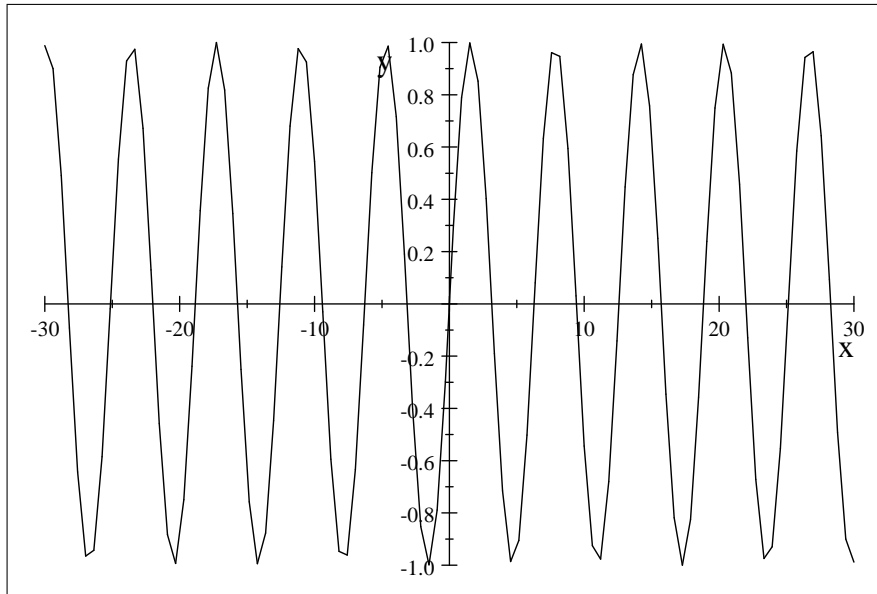
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Se consideriamo la funzione  $f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

Consideriamo ora la funzione  $f(x) = \sin x$  e consideriamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$   
o  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$  non esistono



### Definizione di limite

Diamo ora la definizione precisa di limite di continuità.

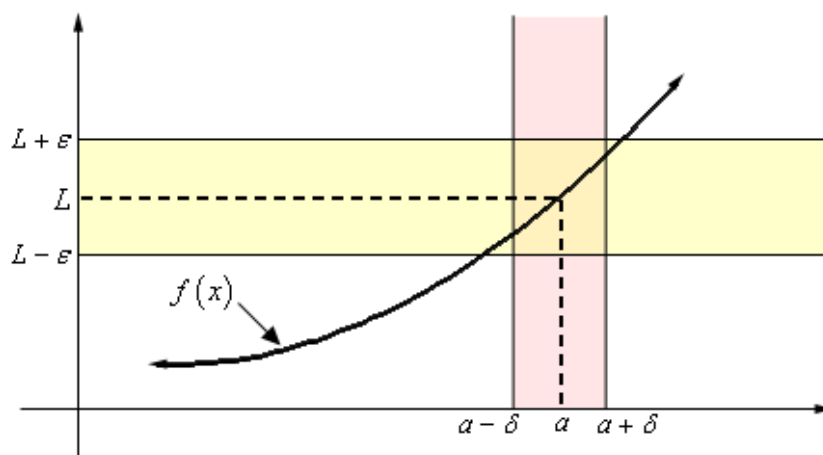
*Limite*

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo contenente  $a$  con l'eventuale esclusione di  $a$ .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, per ogni ( numero positivo)  $\varepsilon > 0$ , esiste un ( numero positivo)  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \varepsilon$  ogni volta che  $a - \delta < x < a + \delta$  e  $x \neq a$ .



Si noti, fissato  $\epsilon$ , che vi sono in realtà un numero infinito di possibili  $\delta$ , in effetti, trovato un  $\delta$ , ogni altro numero positivo più piccolo del  $\delta$  trovato va ancora bene.

Se si restringe  $\epsilon$  si troverà un altro  $\delta$ , ma la cosa importante è che ce ne sia sempre uno ogni volta che si fissa un  $\epsilon > 0$ .

*Esempi*

Usiamo la definizione di limite per provare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0;$$

Consideriamo  $\epsilon > 0$ .

Dobbiamo trovare  $\delta > 0$  tale che  $|x^2 - 0| < \epsilon$  quando  $|x^2 - 0| < \delta$  ( $x \neq 0$ )

$|x^2 - 0| < \epsilon$  equivale a  $-\epsilon < x < \epsilon$ , quindi in questo caso è sufficiente prendere  $\delta = \epsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x - 4 = 6;$$

Consideriamo  $\epsilon > 0$ .

Dobbiamo trovare  $\delta > 0$  tale che  $|5x - 4 - 6| < \epsilon$  quando  $|x - 2| < \delta$  ( $x \neq 2$ )

$|5x - 4 - 6| < \epsilon$  cioè  $|5x - 10| < \epsilon$ , Solution is: equivale a  $-\frac{1}{5}\epsilon + 2 < x < \frac{1}{5}\epsilon + 2$ , quindi in questo caso è sufficiente prendere  $\delta = \frac{1}{5}\epsilon$ .

*Limite destro*

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo destro di  $a$  ( possiamo dire con precisione  $(a, a + r)$ , dove  $r$  è un numero reale positivo).

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un ( numero positivo)  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \epsilon$  ogni volta che  $a < x < a + \delta$

*Limite sinistro*

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo destro di  $a$  (possiamo dire con precisione  $(a - r, a)$ , dove  $r$  è un numero reale positivo).

Allora

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un ( numero positivo)  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \epsilon$  ogni volta che  $a - \delta < x < a$ .

Segue immediatamente dalle definizioni che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se e solo se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

*Limite infinito*

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo contenente  $a$  con l'eventuale esclusione di  $a$ .

Allora:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  se per ogni  $M > 0$  esiste un ( numero positivo)  $\delta > 0$  tale che  $f(x) > M$  ogni volta che  $a - \delta < x < a + \delta$  e  $x \neq a$

Analogamente si dice che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

se per ogni  $M < 0$  esiste un ( numero positivo)  $\delta > 0$  tale che  $f(x) < M$  ogni volta che  $a - \delta < x < a + \delta$  e  $x \neq a$ .

*Esempio*

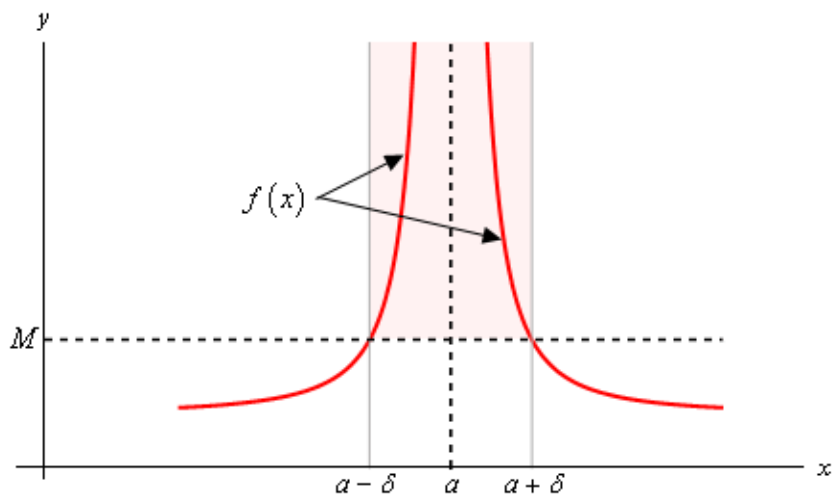
Usiamo la definizione di limite per provare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty;$$

Consideriamo  $M > 0$ .

Dobbiamo trovare  $\delta > 0$  tale che  $\frac{1}{x^2} > M$ , quando  $|x - 0| < \delta$  ( $x \neq 0$ )

La disequazione  $\frac{1}{x^2} > M$  è verificata per gli  $x$  negli intervalli  $\left(-\frac{1}{\sqrt{M}}, 0\right)$   $\left(0, \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$

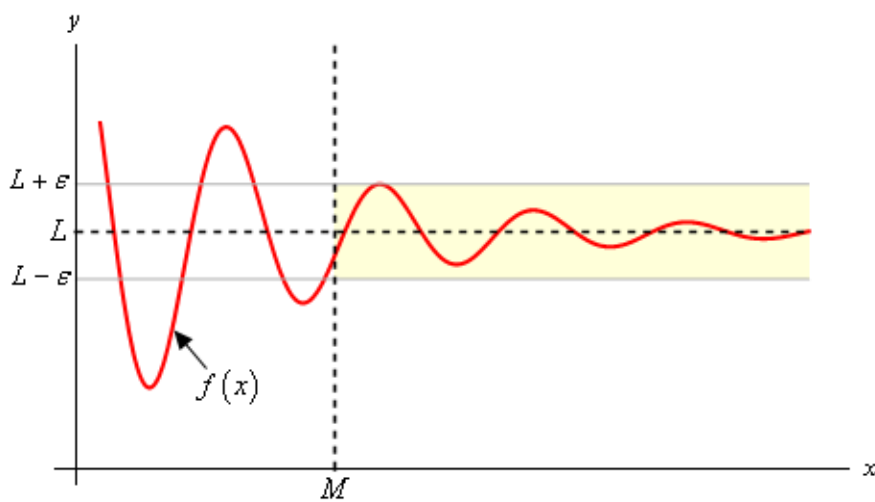


quindi in questo caso è sufficiente prendere  $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ .

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo illimitato superiormente. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se per ogni se per ogni (numero positivo)  $\varepsilon > 0$  esiste  $M > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \varepsilon$  ogni volta che  $x > M$ .



Analogamente si da le definizioni di

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Sia  $f(x)$  è una funzione definita su un intervallo illimitato superiormente. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni  $N > 0$  esiste  $M > 0$  tale che  $f(x) > N$  ogni volta che  $x > M$ .

Analogamente si danno le definizioni per gli altri casi

**Definizione** Una funzione si dice *continua* in  $a$  punto del dominio di  $f$ , se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ogni funzione elementare è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.

## CALCOLO DEI LIMITI

Poichè tutte le funzione elementare sono continua nel loro insieme di definizione possiamo calcolare immediatamente i limiti delle funzioni elementari in ogni punto del loro dominio:

*Esempi*

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni definite in uno stesso intervallo  $I$  (limitato o non limitato) fatta eccezione al

più per un punto  $a \in I$  (con  $a$  eventualmente all'infinito).

Sia  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , con  $L$  e  $M$  numeri reali, allora

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\text{Se } M \neq 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

Se  $L$  e  $M$  sono  $\infty$  valgono le seguenti regole

$$+\infty + M = +\infty$$

$$-\infty + M = -\infty$$

$$+\infty - \infty \quad \text{forma indeterminata}$$

$$+\infty \cdot M = +\infty \quad \text{per } M > 0$$

$$+\infty \cdot M = -\infty \quad \text{per } M < 0$$

$$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

(VALE LA REGOLA DEI SEGNI !)

$\infty \cdot 0$  forma indeterminata

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty \quad (\text{occorre studiare il segno della funzione per stabilire il segno}$$

del risultato)

$$\frac{L}{\infty} = 0$$

$\frac{0}{0}$  forma indeterminata

$\frac{\infty}{\infty}$  forma indeterminata

Forma indeterminata significa il limite considerato può assumere qualunque valore finito od infinito o non esistere come mostrano gli esempi

*Esempi*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione negativa})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad (\text{forma } \frac{\infty}{0} \text{ e funzione positiva})$$

Possiamo concludere che il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  non esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2}$$

Possiamo concludere che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Quindi  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$  non esiste

Forme indeterminate

$$+\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((-x^2 + 1) - x^2) = 1$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

