Matrici

Matrici e determinanti sono stati scoperti e sviluppati nel diciottesimo e diciannovesimo secoli. Inizialmente, il loro sviluppo riguardava lo studio della trasformazione di oggetti geometrici e la ricerca delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari. Le matrici forniscono un metodo teorico e pratico utile per affrontare diversi tipi di problemi, tra cui:

- Ricerca di soluzioni di sistemi di equazioni lineari,
- Ricerca delle posizioni di equilibrio di un corpo rigido (in fisica),
- Teoria dei grafi,
- Teoria dei Giochi,
- Modelli economici,
- Gestione forestale,
- tomografia computerizzata,
- Genetica,
- Crittografia,
- Reti elettriche,
- Frattali.

operazioni fondamentali

Le matrici, anche se possono sembrare strani oggetti a prima vista, sono uno strumento molto importante per rappresentare e discutere di problemi che sorgono dalla vita reale.

Il nostro primo esempio si occupa di economia. Prendiamo in considerazione due famiglie A e B (anche se il problema si può facilmente estendere a un numero maggiore di famiglie). Ogni mese, le due famiglie hanno spese come ad esempio: servizi pubblici, salute, spettacolo, alimentazione, ecc .. Ci limiteremo a considerare: cibo, servizi pubblici , e la salute. Come si possono rappresentare i dati raccolti? Sono disponibili molti modi per farlo, ma uno di loro ha il vantaggio di combinare i dati in modo che siano facile da manipolare. In effetti, noi scrivere i dati per ogni mese come segue:

$$\begin{pmatrix} famiglia & cibo & serivizipubblici & salute \\ A & a & b & c \\ B & d & e & f \end{pmatrix}$$

Se non si crea confusione per distinguere i nomi e le spese, allora si puó scrivere:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Questo è ciò che noi chiamiamo una matrice. La dimensione della matrice, in blocco, è definito dal numero di righe e il numero di colonne. In questo caso, l'ultima matrice ha 2 righe e 3 colonne. Se una matrice che ha m righe e n colonne, diciamo che la matrice è un matrice di tipo $m \times n$, o di tipo (m, n). La prima voce (m) è il numero di righe, mentre la seconda voce (n) è il numero di colonne. La nostra seconda è una matrice (2×3) . Quando il numero di righe e colonne sono uguali, diciamo che la matrice è quadrata. Una matrice quadrata di ordine n, è un matrice $(n \times n)$. Tornando al nostro esempio, assumiamo, per esempio, che le matrici per i mesi di gennaio, febbraio e marzo siano:

G=$\begin{pmatrix} 600 & 250 & 350 \\ 550 & 180 & 400 \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} 650 & 330 & 250 \\ 600 & 270 & 400 \end{pmatrix}$

M=$\begin{pmatrix} 580 & 270 & 350 \\ 625 & 350 & 410 \end{pmatrix}$

Ad esempio le spese mediche per la famiglia A del mese di febbraio ammontano a 250 euro, mentre la spesa per i prodotti alimentari sempre nel mese di febbraio per famiglia B sono di 600 euro.

Se vogliamo la matrice delle spese per le due famiglie per il primo trimestre, abbiamo:

$$PT = \begin{pmatrix} 1850 & 850 & 950 \\ 1775 & 800 & 1210 \end{pmatrix}$$

abbiamo cioè fatto la somma termine a termine delle 3 matrici, abbiamo quindi ottenuto la somma di matrici.

La somma di matrici è possibile solo tra matrici dello stesso tipo $m \times n$.

Somma di Matrici: due matrici dello stesso tipo si possono sommare, la somma si ottiene sommando gli elementi della matrice termine a termine.

Una matrice si può moltiplicare per un numero reale:

Moltiplicazione di una matrice di un numero

Per moltiplicare una matrice per un numero a, si moltiplica ogni termine diper a.

per esempio se vogliamo calcolare: $G + 2F$ e $G - F + 2M$, abbiamo:

$$G{+}2F = \begin{pmatrix} 600 & 250 & 350 \\ 550 & 180 & 400 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 650 & 330 & 250 \\ 600 & 270 & 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1900 & 910 & 850 \\ 1750 & 720 & 1200 \end{pmatrix}$$

mentre

$$G{-}F{+}2M = \begin{pmatrix} 600 & 250 & 350 \\ 550 & 180 & 400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 650 & 330 & 250 \\ 600 & 270 & 400 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 580 & 270 & 350 \\ 625 & 350 & 410 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1110 & 460 & 800 \\ 1200 & 610 & 820 \end{pmatrix}$$

La matrice nulla con tutti i termini nulli di tipo $n \times m$ ha un un ruolo simile al numero zero, per la somma di matrici $n \times m$, cioè, quello di elemento neutro: la matrice nulla sommata ad ogni matrice dello stesso tipo la lascia invariata.

Moltiplicazione di matrici

Prima di dare la definizione formale di come moltiplicare due matrici, daremo un esempio di una situazione concreta in cui si usa il prodotto di matrici.

Prendiamo in considerazione una città con due tipi di popolazione: la popolazione del centro città e la popolazione dei sobborghi.

Supponiamo che ogni anno il 40% della popolazione del centro della città si trasferisce in periferia, mentre il 30% della popolazione dei sobborghi si sposta in centro.

Sia I(risp. S) la popolazione iniziale del centro della città (risp. la suburbana).

Così dopo un anno, la popolazione del centro è

$$0,6I + 0,3S$$

mentre la popolazione della periferia è

$$0,4I + 0,7S$$

Dopo due anni, la popolazione del centro della città è

$$0,6(0,6I + 0,3S) + 0,3(0,4I + 0,7S)$$

e la popolazione extraurbana è data da

$$0,4(0,6I + 0,3S) + 0,7(0,4I + 0,7S)$$

Esiste un bel modo di rappresentare le due popolazioni dopo un certo numero di anni? Mostriamo come le matrici possano essere utili per rispondere a questa domanda. Rappresentano le due popolazioni in una tabella (cioè una matrice colonna con due righe):

$$\begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix}$$

Così dopo un anno la tabella che dà le due popolazioni è

$$\begin{pmatrix} 0,6I + 0,3S \\ 0,4I + 0,7S \end{pmatrix}$$

Il risultato puòessere espresso mediante il prodotto di due matrici.In particolare:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix}$$

quindi le popolazioni dopo un anno viene dato dalla formula:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI + bS \\ cI + dS \end{pmatrix}$$

Dopo due anni le popolazioni sono:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ S \end{pmatrix} \right)$$

Combinando la stessa formula con il risultato sopra ottenuto, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 & 0,6 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 \\ 0,4 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 & 0,4 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \end{pmatrix}$$

In altre parole, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

In realtà, non abbiamo bisogno di disporre di due matrici dello stesso tipo per moltiplicarle.

Sopra, abbiamo moltiplicato una matrice (2×2) con una matrice (2×1) e abbiamo ottenuto una matrice (2×1) .

In effetti, la regola generale dice che, al fine di eseguire la moltiplicazione AB di due matrici, dove A è una matrice $(m \times n)$ e la matrice B è del tipo $(k \times l)$, dobbiamo avere $n = k$.

Il risultato sarà una matrice $(m \times l)$. Per esempio, abbiamo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta + c\gamma \\ d\alpha + e\beta + f\gamma \end{pmatrix}$$

Osseviamo che se siamo stati in grado di eseguire questa moltiplicazione , non è possibile eseguire la moltiplicazione:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Quindi, dobbiamo essere molto attenti a moltiplicare le matrici.

Frasi come "moltiplicare le due matrici A e B" non hanno senso.

Occorre sapere quale delle due matrici sta a destra e quella che sta a sinistra: in altre parole, dobbiamo sapere se ci viene chiesto di eseguire AB o BA .

Anche se entrambe le moltiplicazioni hanno senso (come nel caso di matrici quadrate con le stesse dimensioni), dobbiamo stare attenti all'ordine di moltiplicazione.

Infatti, consideriamo le due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la moltiplicazione di matrici non è commutativa, l'ordine in cui le matrici sono moltiplicate è importante.

Osserviamo anche cheil prodotto di due matrici non nulle può essere la matrice nulla, per esempio $AA = BB$ sono entrambe le matrici nulle.

Diamo ora la **definizione di prodotto di matrici**:

Sia A una matrice $(m \times n)$ e B una matrice $(n \times k)$, si definisce prodotto tra le matrici A e B la matrice $C = AB, (n \times k)$ il cui generico elemento $c_{i,j}$ è la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di$A$ per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di B, ovvero:

$$c_{i,j} = \sum_{z=1}^{n} a_{i,z} b_{z,j}$$

La matrice prodotto C ha tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B.

Il prodotto tra matrici è anche detto *prodotto riga colonna* .

Esempio
Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Poichè A è una matrice (2×3) e B è una matrice (3×4)è possibile eseguire il prodotto tra queste due matrici la la matrice $C = AB$ è (2×4).

Calcoliamo tale matrice.

L'elemento $c_{1,1}$ è dato dal prodotto tra la prima riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 7$$

$$c_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = 0$$

$$c_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = -\frac{8}{3}$$

$$c_{1,4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = -1$$

$$c_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = -8$$

$$c_{2,2} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) = -15$$

$$c_{2,3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = \frac{65}{3}$$

$$c_{2,4} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-2) = -5$$

Ovvero

$$C = AB = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -\frac{8}{3} & -1 \\ -8 & -15 & \frac{65}{3} & -5 \end{pmatrix}$$