Sistemi di equazioni lineari

I sistemi di equazioni si incontrano in natura in molti problemi di vita reale.

Per esempio, prendiamo in considerazione una bevanda a base di uova, latte e succo d'arancia. Le calorie e le proteine di ciascun ingrediente sono indicati nella seguente tabella:

	calorie	grammi
1 uovo	80	6
1 tazza di latte	160	9
1 tazza di succo d'arancia	110	2

Ci possiamo chiedere quale è la quantità necessaria di ciascun ingrediente per produrre una bevanda di 540 calorie e 25 grammi di proteine. Per rispondere, indichiamo con x il numero di uova, con y la quantità di latte (in tazze), e con z la quantità di succo di arancia (in tazze). Quindi otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 80x + 160y + 110z = 540 \\ \\ 6x + 9y + 2z = 25 \end{cases}$$

Risolvere un sistema significa trovare una soluzione. Una soluzione è un elenco di numeri, che sostituiti nell'ordine alle incognite soddisfano le equazioni del sistema. Per esempio, $(2, 1, 2)$ e $(0.325, 2.25, 1.4)$ sono soluzioni per il sistema di cui sopra.

Il problema fondamentale associato a qualsiasi sistema è quello di trovare tutte le soluzioni. Per esempio,

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

sono sistemi di due equazioni con due incognite x e y, mentre

$$\begin{cases} 2x - 3y^2 = -1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

è un sistema di due equazioni con tre incognite x, y, z .

Risolvere sistemi di equazioni non lineari è abbastanza difficile, mentre i sistemi lineari sono abbastanza semplici da studiare. Ci sono tecniche numeriche che permettono di approssimare sistemi non lineari con sistemi lineari ottenendo, in generale, soluzioni abbastanza vicino alle soluzioni dei sistemi non lineari. Noi non ci occuperemo di questo problema e concentreremo la nostra attenzione sui sistemi lineari.

Definizione. L'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b sono coefficienti (numeri noti), mentre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono incognite, è chiamata *equazione lineare.*

Se $b = 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea.*

Un *sistema lineare* è un insieme di equazioni lineari e un *sistema lineare omogeneo* è un insieme di equazioni lineari omogenee.

Per esempio,

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + 3y + 3z = -2 \end{cases}$$

sono sistemi lineari, mentre

$$\begin{cases} 2x - 3y^2 = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

è un sistema non lineare poichè y compare al grado 2.

Il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z + w = 0 \\ x + 3y = 0 \\ x - y + w = 0 \end{cases}$$

è un sistema lineare omogeneo.

Rappresentanzione matriciale di un sistema lineare

Le matrici sono utili per scrivere una sistema lineare in una forma molto semplice, infatti le proprietà algebriche delle matrici possono essere utilizzati per risolvere i sistemi. Ad esempio il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + w = 0 \\ -3x + 5y + z - 2w = -3 \\ 5x - y - \frac{1}{2}z - w = 3 \\ \sqrt{2}x + w = 2 \end{cases}$$

Considerate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Utilizzando la moltiplicazione di matrici, possiamo riscrivere il sistema lineare, come la equazione matriciale:

$$AX = B$$

La matrice A è chiamata la matrice dei coefficienti del sistema lineare.

La matrice B è chiamata la matrice dei termini noti. Quando $B = 0$ (cioè quando i termini noti sono tutti nulli), il sistema lineare si dice *omogeneo.*

La matrice X è la matrice delle incognite del sistema lineare.

La matrice aumentata associata al sistema è la matrice $[A|B]$, dove:

$$[A|B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

In generale se il sistema lineare ha m equazioni con n incognite, la matrice coefficiente è una matrice di tipo (m, n) e la matrice aumentata è una matrice di tipo $(m, (n + 1))$.

Ora rivolgiamo la nostra attenzione per cercare, (se esistono) le soluzioni di un sistema lineare.

Eliminazione gaussiana

Definizione. Due sistemi lineari con n incognite si dicono equivalenti se e solo se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Questa definizione è importante, dato che l'idea alla base della soluzione di un sistema è quella di trovare un sistema equivalente che sia facile da risolvere. Faremo questo attraverso *operazioni elementari* .

1. se si scambiano due equazioni , il nuovo sistema è ancora equivalente a quello vecchio
2. se moltiplichiamo un'equazione con un numero diverso da zero, si ottiene un nuovo sistema equivalente al vecchio.
3. infine la sostituzione di una equazione con la somma della stessa equazione con un'altra, genera un sistema equivalente.

Queste operazioni sono chiamate operazioni elementari per i sistemi lineari. Vediamo come funzionano in un caso particolare.

Esempio. Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 4 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

L'idea è quella di mantenere la prima equazione e di lavorare sulle ultime due. In tal modo, cercheremo di eliminare una delle incognite. Ad esempio, se noi teniamo fisse la prima e la seconda equazione, e sottraiamo la prima dall'ultima, otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 4 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Poi si tengono la prima e l'ultima equazione, e si sottrarre la prima dalla seconda. Otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y + z = 4 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$$

Ora ci concentriamo sulla seconda e la terza equazione. Ripetiamo la stessa procedura. Vogliamo eliminare una delle due incognite (y o z). A tal scopo teniamo la prima e la seconda equazione, e aggiungiamo la seconda alla terza moltiplicata per 3. Otteniamo:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -3y+z=4 \\ -5z=10 \end{cases}$$

Questo implica $z=-2$. Dalla seconda equazione, otteniamo $y=-2$ e, infine, dalla prima equazione otteniamo $x=4$. Quindi il sistema lineare ha come soluzione:

$$x=4; \qquad y=-2 \qquad z=-2$$

.

Utilizzando le nostre conoscenze su matrici, siamo in grado di riscrivere quello che abbiamo fatto sui sistemi sotto forma di matrice; questo renderà la notazione piú facile. Consideriamo la matrice aumentata:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Eseguiamo alcune operazioni elementari di riga su questa matrice.

Sottraiamo la prima riga dall'ultima e otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Poi si sottrae la prima riga dalla seconda e si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Poi teniamo fisse la prima e la seconda riga e aggiungiamo alla terza riga moltiplicata per 3 la seconda e otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right)$$

Si tratta di una matrice ridotta a scalini. Il sistema lineare corrispondente è:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \quad -3y+z=4 \\ \qquad\quad -5z=10 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto lo stesso sistema di prima. In realtà, abbiamo seguito le stesse operazioni elementari eseguite in precedenza. Ad ogni passo la nuova matrice è esattamente la matrice aumentata associata al nuovo sistema. Ciò dimostra che, invece di scrivere i sistemi piú e piú volte, è facile giocare con le operazioni elementari di riga e una volta ottenuta una matrice ridotta a scalini, scrivere il sistema lineare associato e poi risolverlo. Questo è noto come l'eliminazione gaussiana.

Una matrice *ridotta* è una matrice tale che: in ogni riga che non sia nulla il primo elemento non nullo,(*pivot*) ha sotto solo zeri.

Si parla di matrice *ridotta a scalini* se la matrice è ridotta e gli elementi pivot di ciascuna riga si incontrano procedendo da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso nelle prime righe.

Ad esempio

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{7}{3} \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

non è una matrice ridotta a scalini, mentre

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono ridotta a scalini.

Data una matrice A è sempre possibile, con una opportuna serie di operazioni elementari, arrivare a una forma equivalente di A ridotta a scalini. Il risultato può variare a seconda delle operazioni effettuate, ma il sistema lineare corrispondente alla matrice ridotta a scalini trovata ha comunque le stesse soluzioni di quello di partenza.

Si può inoltre dimostrare che il numero di righe con almeno un elemento non nullo di una matrice ridotta a scalini A_0 equivalente ad A dipende solo da A e non dalle operazioni scelte per arrivare ad A_0. Tale numero dicesi *caratteristica* o *rango* di A.

La nozione di rango di una matrice ci permette di enunciare il seguente teorema che ci permette di stabilire se un sistema è coerente o incoerente.

Teorema (di Rouchè Capelli)
Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzioni se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice aumentata $A|b$ hanno lo stesso rango.

Come si arriva alla forma ridotta a scalini.

1. portare al primo posto una riga che cominci con il minor numero di zeri.

2. con operazioni elementari far diventare zero tutti gli elementi della colonna sottostante il primo elemento diverso da zero della prima riga.

3. ripetere il procedimento dalla seconda riga in giù, poi dalla terza in giù, etc. . . .

Cerchiamo di riassumere la procedura:

Eliminazione gaussiana usando le matrici.

1. Costruire la matrice aumentata per il sistema;

2. Usare le trasformazioni elementari riga in modo da trasformare la matrice aumentata in una ridotta a scalini;

3. Scrivere il nuovo sistema lineare per i quali la matrice ridotta a scalini aumentata è la relativa matrice;

4. Risolvere il nuovo sistema.

Potrebbe essere necessario assegnare alcuni valori di parametro di alcune incognite, quindi applicare il metodo di sostituzione per risolvere il nuovo sistema. Prendiamo in considerazione un sistema lineare.

Esempio. Risolviamo il seguente sistema tramite l'eliminazione gaussiana:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 2w + 3v = 4 \\ 4x - 4y - z + 4w + 11v = 4 \\ 2x - 5y + 2z + 2w - v = 9 \\ 2y + z + 4v = -5 \end{cases}$$

La matrice aumentata è:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & -1 & 4 & 11 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Usiamo trasformazioni elementari di riga per ottenere una matrice ridotta a scalini. Manteniamo la prima riga e utilizziamola per produrre tutti zeri altrove nella prima colonna.Con le operazioni $R_2 - 2R_1; R_3 - R_1$ otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Ora manteniamo la prima e la seconda riga e otteniamo zeri nella seconda colonna a partire dal terzo elemento: $R_3 + R_2; R_4 - R_2$; otteniamo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Si tratta di una matrice ridotta a scalini. Il suo sistema associato è:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 2w + 3v = 4 \\ 2y + z + 5v = -4 \\ v = 1 \\ -v = -1 \end{cases}$$

Abbiamo v = 1. Quindi

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 2w = 1 \\ 2y + z = -9 \\ v = 1 \\ \end{cases}$$

Poniamo $z = s$ e $w = t$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{4} - \frac{1}{4}s - t \\ -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}s \\ s \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio. Utilizzare l'eliminazione gaussiana per risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

La matrice aumentata associata è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Sottraendo la prima riga moltiplicata per 2 alla seconda riga otteniamo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

Chiaramente la seconda equazione non ha soluzione, pertanto questo sistema lineare non ha alcuna soluzione.

Definizione. Un sistema lineare è chiamato incoerente o impossibile se non ha alcuna soluzione. In altre parole, l'insieme di soluzioni è vuoto. Altrimenti il sistema lineare è chiamato coerente.

Seguendo l'esempio di cui sopra, vediamo che, se vogliamo eseguire operazioni elementari di riga sulla matrice aumentata del sistema otteniamo una matrice con una delle sue righe del tipo $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$. Allora il sistema è incoerente.

Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} y + 2z + 3v + 4w = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 6v + 7w = 2 \\ x + y + 2z + 3v + 3w = 1 \\ -2x - y - 2z - 3v - 2w = -2 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice aumentata del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

scambiando la prima riga con la terza, in modo che la nuova prima riga cominci con un elemento diverso da 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 e sommando alla quarta riga la prima moltiplicata per 2 otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

adesso sotto al primo elemento della prima riga ci sono solo zeri, quindi ripetiamo il procedimento a partire dalla seconda riga

scambiando la seconda e la terza riga otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

sommando alla quarta riga la seconda riga moltiplicata per -1 otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice ridotta a scalini, corrispondente a un sistema lineare equivalente a quello di partenza.

Il sistema associato è:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3v + 3w = 1 \\ y + 2z + 3v + 4w = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

dalla terza equazione si ha $w = 0$; sostituendo nella seconda si ottiene
$y = -2z - 3v$;
sostituendo ancora le soluzioni trovate per w e y nella prima si ricava
$x = 1$.
Osserviamo che le soluzioni

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2z - 3v \\ v = v \\ z = z \\ w = 0 \end{cases}$$

$x = 1, y = -2z - 3v, z$ qualsiasi, ve z e $w = 0$
dipendono da due parametri z e v che possono assumere valori arbitrari.

Come risolvere un sistema.

Supponiamo di avere un sistema con n incognite

Per prima cosa si riduce la matrice aumentata a scalini e in tal modo si riduce a scalini anche la matrice dei coefficienti.

Poi si confrontano i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice aumentata: basta contare i pivot nelle due matrici. Se i ranghi sono diversi cioè se esiste un pivot nella colonna dei termini noti, il sistema è impossibile (incoerente).

Altrimenti , detto r il rango comune, si cancellano le (eventuali) ultime equazioni che hanno i coefficienti e il termine noto nulli.

Rimangono r equazioni:

Si portano $n-r$ variabili che non moltiplicano i pivot a destra e si considerano come parametri che possono variare liberamente.

Si ottiene così un sistema quadrato di $r$equazioni in r incognite con termini noti dipendenti da $n-r$ parametri, la cui matrice dei coefficienti ha tutti gli elementi sotto alla diagonale uguali a zero.

Dall'ultima equazione si ricava il valore dell'unica incognita che vi compare, lo si sostituisce nella penultima, che diventa cosìin una sola incognita; si ricava quest'ultima e così via a ritroso fino alla prima equazione e alla prima incognita.

Le soluzioni resteranno espresse in funzione delle $n-r$ incognite portate a destra come parametri arbitrari:

si dice allora che si hanno soluzioni dipendenti da $n-r$ parametri.

Esempi

1.
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

La Matrice aumentata del sistema è:
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

Sostituiamo ad R_2 la riga $R_2 + \frac{1}{3}R_1$ e otteniamo:
$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo ad R_3 la riga $R_3 - \frac{2}{3}R_1$e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 3 & -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Ora invedrtiamo R_2 con R_3

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Quindi i ranghi della matrice incompleta e completa coincido : sono 3.

Il sistema equivalente è pertanto:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 - \frac{11}{3}x_3 = -\frac{2}{3} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 1 = 1 \\ 3x_2 - \frac{11}{3} = -\frac{2}{3} \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Quindi, la soluzione è

$x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$

ed è unica.

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

La Matrice aumentata del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo ad R_2 la riga $R_2 - 2R_1$e ad R_3 la riga $R_3 - 4R_1$otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo ottenuto : due righe uguali, dunque sostituendo ad R_3 la riga $R_3 - R_2$otteniamo una riga di 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il procedimento è terminato con il sistema

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

che ha solo due equazioni nelle tre incognite x_1;x_2;x_3: In questo caso esistono infnite soluzioni. Infatti una delle tre incognite può assumere un qualunque valore e da questo è sempre possibile ricavare il valore delle altre due. La forma usata per esprimere le soluzioni in questo caso è del tipo

$$\begin{cases} x_3 = t \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}t + \frac{1}{3} \\ x_1 = x_3 - x_2 + 4 = x_3 - (\frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}) + 4 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 0 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases}$$

al variare di t nei numeri reali

4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

La Matrice aumentata del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

Sostituiamo ad R_2 la riga $R_2 - 2R_1$e ad R_3 , $R_3 - 5R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -28 \end{pmatrix}$$

ll procedimento è terminato con il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 3x_3 = 6 \\ 2x_3 = -28 \end{cases}$$

che è impossimbile perchè che non può mai essere verificato per nessun valore di x_1, x_2,x_3.

In alternativa, si può anche sostituire ad R_3 , $R_3 - \frac{2}{3}R_2$,si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}$$

e il rango della matrice del sistema risulta 2, mentre quello della matrice aumentata è 3. Quindi il sistema non ha soluzioni.