

1) Dati 3 eventi E, F, G quale delle seguenti espressioni rappresenta l'evento che se ne verificano esattamente 2:

a) $EF\tilde{G} + E\tilde{F}G + \tilde{E}FG$

b) $EF\tilde{G} \vee E\tilde{F}G \vee \tilde{E}FG$

c) $(E \vee F \vee \tilde{G})(E \vee \tilde{F} \vee G)(\tilde{E} \vee F \vee G)$

2) In quanti modi si pu'ò dividere una classe di 16 studenti in due gruppi di 8 studenti?

3) Un dado con le facce contrassegnate con i numeri da 1 a 6 viene lanciato 6 volte. Quante sono le possibili successioni di risultati che si possono ottenere?

Quante sono le successioni che hanno tutti i risultati diversi fra loro?

4) Sia E_i , per $i=1, 2, 3, 4$ l'evento che nell' i -esimo lancio di una moneta si ottiene testa. Siano A, B, C gli eventi:

$$A = (E_1 + E_2 + E_3 \geq 2)$$

$$B = (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \geq 2)$$

$$C = (E_1 + E_2 \geq 2)$$

Dire quale delle seguenti relazioni è vera

a) $B \subset A \subset C$

b) $B \subset A \subset C$

c) $C \subset A \subset B$

5) In 3 estrazioni senza reimbussolamento da un'urna che contiene palline contrassegnate dai numeri da 1 a 90 quanti possibili risultati si possono ottenere?

6) Le carte di un mazzo di 52 carte vengono distribuite ai giocatori A, B, C, D , 13 a ogni giocatore. Qual è la probabilità che i giocatori A e C abbiano due assi (valore approssimato)?

a) 0.001

7) Sia X un numero aleatorio con $I(X) = \{1, 2, 5, 7\}$. Sia $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 5) = \mathbf{P}(X = 7) = \frac{1}{4}$. A quanto è uguale $\mathbf{P}(X)$?

8) Un dado con le facce contrassegnate con i numeri da 1 a 6 viene lanciato 6 volte. Qual è la probabilità di non ottenere mai il risultato 1 ?

Qual è la probabilità di ottenere risultati tutti diversi ?

9) Un'urna contiene 10 palline di cui 4 rosse, 5 blu e 1 gialla.

Qual è la probabilità che, facendo 3 estrazioni senza reimbussolamento, si ottengano una pallina rossa, una blu e una gialla?

10) In 3 estrazioni senza reimbussolamento da un'urna che contiene palline contrassegnate dai numeri da 1 a 90 quanti possibili risultati si possono ottenere?

Quanti sono i risultati in cui i numeri sono in ordine crescente?

11) Gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4 sono stocasticamente indipendenti e le loro probabilità sono $\mathbf{P}(E_1) = 0.5, \mathbf{P}(E_2) = 0.25, \mathbf{P}(E_3) = 0.3, \mathbf{P}(E_4) = 0.2$. Qual è la probabilità dell'evento $E = (E_1 \tilde{E}_2) \vee (\tilde{E}_3 \tilde{E}_4)$ (valore approssimato)?

Le carte di un mazzo di 52 carte vengono distribuite ai giocatori A, B, C, D , 13 a ogni giocatore. Qual è la probabilità che i giocatori A e C abbiano due assi?

12) Sia X il numero dei successi nelle prime quattro prove di uno schema di Bernoulli di parametro $p = 0.4$. Sia $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 5) = \mathbf{P}(X = 7) = \frac{1}{4}$. Qual è la probabilità dell'evento $E = (X = 2)$?

13) Sia X il numero della prova di uno schema di Bernoulli di parametro $p = 0.2$ in cui si ottiene il primo successo.

Qual è la probabilità dell'evento $E = (X > 4)$ (valore approssimato)?

14) In un'urna ci sono 5 palline bianche e 6 palline nere. Si fanno 4 estrazioni senza reimbussolamento.

Qual è la probabilità di ottenere 2 palline bianche e 2 nere?

15) Qual è la probabilità dello stesso evento se si fanno estrazioni con reimbussolamento ?

16) Il numero aleatorio X ha densità di probabilità

$$p(x) = Kx^2(2 \leq x \leq 4),$$

dove $(2 \leq x \leq 4)$ è una notazione per una funzione che è uguale a 1 se le disegualianze sono verificate e 0 altrimenti.

16a) A quanto è uguale la costante K ?

16b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(3 \leq X \leq 4)$?

16c) A quanto è uguale $\mathbf{P}(X)$?

17) Il numero aleatorio X ha densità di probabilità

$$p(x) = K \sin(x)(0 \leq x \leq \pi),$$

17a) A quanto è uguale la costante K ?

17b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{3\pi}{4})$?

18) Il numero aleatorio X ha distribuzione esponenziale di parametro 3.

18a) A quanto è uguale la costante $\mathbf{P}(\log(2) \leq X \leq \log(3))$?

18b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(3 \leq X \leq 4)$?

19) La funzione di ripartizione dei numeri aleatori X, Y è data da:

$$F(x, y) = (x \geq 0)(y \geq 0) \frac{x^2 y^3}{(1 + x^2)(1 + y^3)}$$

19a) Qual è la probabilità dell'evento $(1 < X \leq 2)(0 < Y \leq 2)$?

19b) Qual è la probabilità dell'evento $Y \leq 2$?

19c) Qual è la probabilità dell'evento $(X > 3)$?

20) I numeri aleatori X e Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} K & \text{per } 0 \leq y \leq 2, y - 2 \leq x \leq 8 - y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

20a) Qual è il valore della costante K ?

20b) Calcolare la densità marginale di X . A quanto è uguale $\mathbf{P}(X)$?

20c) Calcolare la densità marginale di Y . A quanto è uguale $\mathbf{P}(Y)$?

21) I numeri aleatori X Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} K & \text{se } 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

21a) A quanto è uguale K ?

21b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(X)$?

21c) A quanto è uguale $\sigma^2(Y)$?

21d) A quanto è uguale $\mathbf{cov}(X, Y)$?

22) I numeri aleatori X Y hanno densità congiunta

$$K \exp \left(-\frac{1}{2} \left((x-2)^2 + \frac{(y-3)^2}{3} + 0.1(x-1)(y-3) \right) \right)$$

22a) A quanto è uguale (X, Y) (il coefficiente di correlazione fra X e Y ?

22b) A quanto è uguale K (valore approssimato)?

23) Il numero aleatorio X ha densità di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} Kx \exp(-2x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

23a) A quanto è uguale K ?

23b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(X \geq 1)$ (valore approssimato)?

24) Il numero aleatorio X ha densità di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} Kx^2(1-x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

24a) A quanto è uguale K ?

24b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{4})$?

25) Gli eventi $(E_i)_{i \geq 1}$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con $P(E_i | \Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} K\theta^3(1-\theta)^2 & \text{per } 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservano i valori dei primi 4 eventi: $E_1 = E_2 = 1, E_3 = E_4 = 0$.

Qual è la previsione a posteriori di Θ ?

26) I numeri aleatori X_1, X_2, \dots sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con densità subordinata

$$f(x|\theta) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{50}\right)$$

$\mathbf{P}(E_i = 1 | \Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta-1)^2}{2}\right)$$

Si osservano i valori dei primi 3 numeri aleatori: $X_1 = 1.2, X_2 = 0.8, X_3 = -0.4$.

Qual è la previsione a posteriori di Θ ?

27) La catena di Markov $X_n, n = 0, 1, 2, \dots$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha la seguente matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{10}, \rho_3 = \frac{1}{5}, \rho_4 = \frac{3}{5}.$$

27a) A quanto è uguale $p_{1,3}^{(2)}$?

27b) A quanto è uguale $\mathbf{P}(X_2 = 3)$?

28) La catena di Markov X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ha la seguente matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{2}, \rho_3 = 0, \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \frac{1}{6}.$$

28a) A quanto è uguale il periodo dello stato 2?

28b) Quante sono le classi di equivalenza?

29) La, catena di Markov X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ ha la seguente matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{1}{2}, \rho_3 = \frac{1}{2}.$$

29a) A quanto è uguale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,2}^{(n)}?$$

29b) A quanto è uguale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 3)?$$