

Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica
Martedì 10 febbraio 2015

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a..... (matricola.....)
autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a
pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il
numero di matricola.

Firma

1) Un'urna contiene 6 palline di cui una blu, due rosse e tre verdi. Vengono estratte dall'urna due palline senza reimbussolamento. Siano X e Y rispettivamente il numero delle palline rosse e verdi estratte.

- a) Calcolare $\mathbf{P}(X)$ e $\mathbf{P}(Y)$.
- b) Calcolare $\sigma^2(X)$ e $\sigma^2(Y)$.
- c) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$ e $\mathbf{r}(X, Y)$.

Brutta copia

2) I numeri aleatori X, Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} Ke^{-(3x+4y)} & \text{per } 0 < x, 0 < y, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove K è la costante di normalizzazione.

- a) Calcolare K .
- b) Calcolare la funzione di ripartizione congiunta di X e di Y .
- c) Calcolare $\mathbf{P}(0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 2)$.

Brutta copia

3) Gli eventi E_1, E_2, \dots sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con $\mathbf{P}(E_i|\Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} K(\theta - \theta^2) & \text{per } 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservano i valori dei primi 5 eventi: $E_1 = 0, E_2 = 1, E_3 = 0, E_4 = E_5 = 1$.

- a) Calcolare la costante K e la previsione a priori di Θ .
- b) Scrivere la densità a posteriori di Θ .
- c) Calcolare la previsione e la varianza a posteriori di Θ .
- d) Calcolare la probabilità a posteriori di $\widetilde{E}_6 \widetilde{E}_7$.

Brutta copia

4) Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ ha insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$, matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{1}{5}, \quad \rho_2 = \frac{2}{5}, \quad \rho_3 = \frac{1}{5}, \quad \rho_4 = \frac{1}{5}.$$

- Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 2)$.
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esiste e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,2}^{(n)}.$$

Brutta copia