

Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica  
Corso di Laurea in Informatica  
Mercoledì 14 gennaio 2015

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a..... (matricola.....)  
autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a  
pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il  
numero di matricola.

Firma

1) Da un'urna contenente palline identiche numerate da 1 a 5 vengono estratte 3 palline senza reimbussolamento.

a) Qual è la probabilità che non venga estratto il numero 4?

b) Qual è la probabilità che vengano estratti i numeri 1 e 2?

c) Qual è la probabilità che vengano estratti tutti numeri dispari?

d) Siano  $X_1, X_2, X_3$  i numeri estratti nelle 3 estrazioni. Sia  $Y = X_1 + X_2 + X_3$ .  
Calcolare  $\mathbf{P}(Y)$ .

Brutta copia

2) I numeri aleatori  $X, Y$  hanno densità congiunta

$$\pi(x, y) = \begin{cases} K & \text{per } -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq (2 + 2x) \wedge (2 - x) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Calcolare  $K$ .
- b) Calcolare  $p_1(x), p_2(y)$  le densità marginali di  $X$  e di  $Y$ .
- c) Calcolare  $\mathbf{P}(X)$  e  $\mathbf{P}(Y)$ .

Brutta copia

3) Una catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  ha insieme degli stati  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ , matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{6}.$$

- Calcolare  $\mathbf{P}(X_2 = 2)$ .
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esistono e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,1}^{(n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 2)$$

Brutta copia

4) I numeri aleatori  $X_1, X_2, \dots$  sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio  $\Theta$  con densità subordinata

$$f(x|\theta) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{18}\right)$$

La densità a priori di  $\Theta$  è data da

$$\pi_0(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta+2)^2}{32}\right)$$

Si osservano i valori dei primi 3 numeri aleatori:  $X_1 = -1.8, X_2 = -2.4, X_3 = -2.2$ .

- a) Calcolare la densità a posteriori di  $\Theta$ .
- b) Calcolare la previsione e la varianza a posteriori di  $\Theta$ .

Brutta copia