Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica
Martedì 23 giugno 2015

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a.. (matricola...........................) autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il numero di matricola.

Firma

1) Le carte di un mazzo di 52 carte vengono distribuite in maniera casuale fra i giocatori A, B, C e D.

(a) Calcolare la probabilità che i giocatori A e B abbiano solo carte di cuori e di quadri.

(b) Calcolare la probabilità che il giocatore A abbia esattamente una carta di cuori e due carte di picche.

(c) Calcolare la probabilità che ogni giocatore abbia esattamente un asso, un due e un tre.

Brutta copia

2) I numeri aleatori $X_1, X_2, \ldots$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con densità subordinata

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{(x-\theta)^2}{8})$$

$\mathbf{P}(E_i = 1|\Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\theta+2)^2}{2})$$

Si osservano i valori dei primi 3 numeri aleatori: $X_1 = -1.8, X_2 = -0.4, X_3 = -2.8$.

a) Calcolare la densità a posteriori di Θ.

b) Calcolare previsione e varianza a posteriori di Θ.

Brutta copia

3) Sia (X, Y) un vettore aleatorio con la seguente densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} K(x+y) & \text{per } 0 \leq x \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare la costante K.

b) Determinare la densità marginale di X e quella di Y.

c) Dire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

d) Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\mathbf{P}(Y)$, $\sigma^{\mathbf{2}}(X)$, $\sigma^{\mathbf{2}}(Y)$.

e) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$.

Brutta copia

4) Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ ha insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$, matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{4}, \quad \mu(2) = \frac{1}{2}, \quad \mu(3) = \frac{1}{4}.$$

a) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 1)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 2 | X_0 = 1)$.

b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

c) Dire se esiste e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,1}^{(n)}.$$

Brutta copia