

Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica  
Corso di Laurea in Informatica  
Martedì 6 settembre 2016

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a..... (matricola.....)  
autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a  
pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il  
numero di matricola.

Firma

1) In una sala studio ci sono 5 studenti del primo anno, 2 studenti del secondo anno e 3 studenti de terzo anno.

- a) Se si scelgono a caso 3 studenti qual è la probabilità che fra i 3 ve ne sia uno per ogni anno di corso.
- b) Se si scelgono a caso 4 studenti qual è la probabilità che fra i 4 ve ne siano 2 di un anno di corso e 1 degli altri due.

Brutta copia

2) I numeri aleatori  $X, Y$  hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} Kx^2y & \text{per } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove  $K$  è la costante di normalizzazione.

- a) Calcolare  $K$ .
- b) Calcolare  $p_1(x), p_2(y)$  le densità marginali di  $X$  e  $Y$ .
- c) Calcolare  $\mathbf{P}(Y)$ .

Brutta copia

3) Gli eventi  $E_1, E_2, \dots$  sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio  $\Theta$  con  $\mathbf{P}(E_i|\Theta = \theta) = \theta$ . La densità a priori di  $\Theta$  è data da

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} K(\theta - \theta^2) & \text{per } 0 \leq \theta \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservano i valori dei primi 2 eventi:  $E_1 = 0$  e  $E_2 = 0$ .

- a) Calcolare la costante  $K$  e la probabilità priori dell'evento  $(\frac{1}{3} \leq \Theta \leq \frac{1}{2})$ .
- b) Scrivere la densità a posteriori di  $\Theta$ .
- c) Calcolare la probabilità a posteriori dell'evento  $(\Theta \leq \frac{1}{2})$ .

Brutta copia

4) Una catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  ha insieme degli stati  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ , matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{3}{4} \quad \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \frac{1}{12}.$$

- Calcolare  $\mathbf{P}(X_2 = 2)$ .
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esiste e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,1}^{(n)}.$$

Brutta copia