

Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica
Martedì 13 giugno 2017

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a..... (matricola.....)
autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a
pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il
numero di matricola.

Firma

1) Un'urna contiene 10 palline di cui 2 blu, 2 rosse e 6 verdi. Vengono estratte dall'urna 4 palline senza reimbussolamento. Siano X e Y rispettivamente il numero delle palline rosse e verdi estratte.

- a) Qual è la probabilità di estrarre una pallina blu, due rosse e una verde?
- b) Calcolare $\mathbf{P}(X)$ e $\mathbf{P}(Y)$.
- c) Calcolare $\sigma^2(X)$ e $\sigma^2(Y)$.
- d) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$ e $\mathbf{r}(X, Y)$.

Brutta copia

2) I numeri aleatori X, Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} Ke^{-y} & \text{per } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove K è la costante di normalizzazione.

- a) Calcolare K .
- b) Calcolare le densità marginali di X e di Y .
- c) Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\mathbf{P}(Y)$.
- d) Calcolare $\mathbf{P}(XY)$.

Brutta copia

3) I numeri aleatori X_1, X_2, \dots sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con densità subordinata

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{8}\right).$$

La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta+1)^2}{18}\right).$$

Si osservano i valori dei primi 3 numeri aleatori: $X_1 = -1.2, X_2 = -0.8, X_3 = -0.4$.

- a) Calcolare la previsione e la varianza a posteriori di Θ .
- b) Calcolare la densità a posteriori di Θ .

Brutta copia

4) Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ ha insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$, matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{1}{5}, \quad \rho_2 = \frac{2}{5}, \quad \rho_3 = \frac{1}{5}, \quad \rho_4 = \frac{1}{5}.$$

- Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 2)$.
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esiste e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,3}^{(n)}.$$

Brutta copia