

Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica
Mercoledì 26 luglio 2017

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a..... (matricola.....)
autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a
pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il
numero di matricola.

Firma

1) I numeri aleatori X, Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} K \sin(x + y) & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove K è la costante di normalizzazione.

- a) Calcolare K .
- d) Calcolare le densità marginali $p_1(x), p_2(y)$.
- c) Calcolare $\mathbf{P}(X), \mathbf{P}(Y)$.
- d) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$.

Brutta copia

2) I numeri aleatori X_1, X_2, \dots sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con densità subordinata

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{18}\right)$$

$\mathbf{P}(E_i = 1|\Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta+3)^2}{2}\right)$$

Si osservano i valori dei primi 3 numeri aleatori: $X_1 = -3.2, X_2 = -2.8, X_3 = -3.4$.

- a) Calcolare la densità a posteriori di Θ .
- b) Calcolare previsione e varianza a posteriori di Θ .

Brutta copia

3) Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ ha insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$, matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{2}{5}, \quad \rho_2 = \frac{1}{5}, \quad \rho_3 = \frac{1}{5}, \quad \rho_4 = \frac{1}{5}.$$

- Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 3)$.
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esistono e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,2}^{(n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 3)$$

Brutta copia

4) I numeri aleatori X e Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = K \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 - xy + 3x + 2y)\right).$$

Calcolare

- a) Calcolare la costante K .
- b) Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\mathbf{P}(Y)$
- c) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$, $\mathbf{r}(X, Y)$ (il coefficiente di correlazione di X e Y).

Brutta copia