Esame scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica.
Venerdì 21 gennaio 2005

Nome e cognome :

Corso di laurea:

Numero di matricola completo:

Firma:

1) Una catena di Markov X_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha la seguente matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{4}, \quad \mu_3 = \frac{1}{8}, \quad \mu_4 = \frac{1}{8}.$$

a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi;

b) dire se esistono e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,4}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{3,2}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

c) Calcolare $\mathbf{P}(X_2)$.

Brutta copia

2) Un'urna contiene 20 palline di cui 14 bianche e 6 nere. Vengono effettuate 6 estrazioni senza reimbussolamento. Sia E_i l'evento che la i-esima pallina estratta è bianca.

a) Calcolare $\mathbf{P}(E_1)$, $\mathbf{P}(E_3)$, $\mathbf{P}(E_6)$, $\mathbf{cov}(E_2, E_4)$.

b) Sia $X = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6$ il numero di palline bianche estratte. Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\sigma^{\mathbf{2}}(X)$.

c) Calcolare le stesse quantità nel caso in cui le estrazioni vengano effettuate con reimbussolamento.

Brutta copia

2) Siano X, Y due numeri aleatori con densità congiunta

$$p(x,y) = \begin{cases} K & \text{per } 2 \leq x \leq 10,\ 4 \leq y \leq 6, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare K.

b Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\mathbf{P}(Y)$.

c) Calcolare $\sigma^{\mathbf{2}}(X)$, $\sigma^{\mathbf{2}}(Y)$, $\mathbf{cov}(X,Y)$.

d) Sia $Z = X + Y$. Calcolare $\mathbf{P}(Z)$, $\mathbf{P}(Z^2)$, $\mathbf{cov}(X,Z)$.

Brutta copia