ARGOMENTI DEL CORSO

ANALISI NUMERICA

A.A. 2000/2001

Funzioni Spline

Giulio Casciola

aprile 2000
rivisto e corretto marzo 2001

Indice

1 Spline polinomiali **5**

1.1 Polinomi a tratti e spline 5

1.2 Valutazione delle funzioni spline 10

1.2.1 Algoritmo 1 11

1.2.2 Algoritmo 2 13

1.3 Derivate delle funzioni spline 15

1.4 Antiderivata delle funzioni spline 17

1.5 Funzioni spline di interpolazione 18

1.5.1 Interpolazione di Lagrange 18

1.5.2 Spline cubiche di interpolazione 20

1.5.3 Derivate agli estremi 21

1.5.4 Naturali 22

1.5.5 Periodiche 24

1.6 Spline cubiche e proprietá di minimo 25

1.7 Funzioni spline di approssimazione 27

1.7.1 Approssimazione ai minimi quadrati. 27

Capitolo 1

Spline polinomiali

1.1 Polinomi a tratti e spline

I polinomi sono molto importanti nella teoria dell'approssimazione e nell' analisi numerica. Il motivo deriva dalle ben note buone proprietà dello spazio $I\!P_m$. In pratica si osserva che essi possiedono uno sfortunato comportamento, cioè molti metodi di approssimazione forniscono come soluzione polinomi che oscillano fortemente. Questa proprietà negativa dei polinomi è una specie di inflessibilità della classe $I\!P_m$. Più precisamente i polinomi sembrano comportarsi correttamente su intervalli piccoli, ma su intervalli grandi, in particolare per un ordine (grado m-1) maggiore di 3 o 4 si presenta questo fenomeno delle oscillazioni. Questa osservazione suggerisce che per avere una classe di funzioni di approssimazione con maggior flessibilità, si dovrebbe lavorare con polinomi di grado relativamente basso e suddividire l'intervallo di interesse in piccole parti. Si può allora dare la seguente definizione.

Definizione 1.1 (Spazio dei polinomi a tratti) *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato, $\Delta = \{x_i\}_{i=1,\dots,k}$ un insieme di punti, detti nodi, tali che:*

$$a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} \equiv b$$

Consideriamo la partizione di $[a, b]$ in $k+1$ sottointervalli indotta dall'insieme Δ:

$$\begin{array}{ll} I_i = [x_i, x_{i+1}) & i : 0, \dots, k-1 \\ I_k = [x_k, x_{k+1}] & \end{array}$$

Dato un intero positivo m, e indicato con $I\!P_m$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di ordine al più m, definiamo lo spazio dei polinomi a tratti:

$$PI\!P_m(\Delta) = \{f \mid \exists p_0, \dots, p_k \in I\!P_m \ t.c. \ f(x) = p_i(x) \ \forall x \in I_i, \ i = 0, \dots, k\}$$

Mentre è chiaro che passando dai polinomi ai polinomi a tratti si è guadagnato in flessibilità, è anche ovvio che allo stesso tempo si è perso un'altra proprietà importante; i polinomi a tratti non sono necessariamente funzioni regolari. In molte applicazioni si richiede che la funzione approssimante sia almeno continua. Per recuperare la caratteristica di regolarità dei polinomi, si introduce lo spazio delle funzioni spline.

Definizione 1.2 (Spline a nodi semplici) *Siano $[a, b]$ e Δ come nella definizione 1.1 e sia m un intero positivo. Si definisce lo spazio delle funzioni spline polinomiali di ordine m a nodi semplici nel modo seguente:*

$$S_m(\Delta) = P\mathbb{P}_m(\Delta) \cap C^{(m-2)}_{[a,b]}$$

Ogni elemento di $S_m(\Delta)$ è sufficientemente flessibile e regolare.

Osservazioni

1. Con l'introduzione delle funzioni spline si corregge la non regolarità dei polinomi a tratti ottenendo funzioni derivabili con continuità fino all'ordine $m - 2$, che è la massima regolarità che si può richiedere ai polinomi a tratti per non ricadere nel caso di un unico polinomio definito su tutto $[a, b]$.

2. Risulta che:

   $$\mathbb{P}_m \subset S_m(\Delta) \subset P\mathbb{P}_m(\Delta)$$

   dove $\mathbb{P}_m$è lo spazio di tutti i polinomi di ordine minore o uguale ad m (grado minore o uguale ad $m - 1$) compreso il polinomio nullo. $P\mathbb{P}_m(\Delta)$ ed $S_m(\Delta)$ sono due spazi di funzioni con caratteristiche estreme: nel primo può non esistere alcuna regolarità, nel secondo si ha la massima regolarità sull'intervallo $[a, b]$. Esistono però altri spazi di funzioni che presentano caratteristiche di regolarità, ma non così elevata come per lo spazio $S_m(\Delta)$. Questi sono gli spazi delle funzioni spline polinomiali a nodi multipli.

Diamo ora una definizione equivalente, ma più costruttiva per funzioni spline a nodi semplici.

Definizione 1.3 (Spline a nodi semplici) *Siano $[a, b]$ e Δ come nella definizione 1.1 e sia m un intero positivo. Si definisce lo spazio delle funzioni spline polinomiali di ordine m a nodi semplici nel modo seguente:*

$$S_m(\Delta) = \{s(x) \mid \exists s_0(x), \ldots, s_k(x) \in \mathbb{P}_m \ t.c.$$

1. $s(x) = s_i(x)$ *per* $x \in I_i \quad i = 0, \ldots, k$

2. *condizione di continuità sui nodi:*
   $D^l s_{i-1}(x_i) = D^l s_i(x_i)$ *per* $l = 0, \ldots, m-2 \qquad i = 1, \ldots, k\}$

Teorema 1.1 *$S_m(\Delta)$ è uno spazio di funzioni di dimensione $m + k$.*

Per la dimostrazione si veda [SHU81].

Ogni funzione spline $s(x)$, può essere rappresentata come combinazione lineare di una base di $S_m(\Delta)$.
Una base stabile dal punto di vista computazionale è costituita dalle funzioni B-spline Normalizzate.

Definizione 1.4 (Partizione estesa) *L'insieme $\Delta^\star = \{t_i\}_{i=-m+1,\ldots,m+k}$ si chiama partizione estesa associata ad $S_m(\Delta)$ se e solo se*

1. $t_{-m+1} \leq t_{-m+2} \leq \ldots \leq t_{m+k}$

2. $t_0 \equiv a$; $t_{k+1} \equiv b$

3. $t_i := x_i \quad i = 1, \ldots, k$

Esempio Sia $[a, b] = [0, 1]$, $m = 4$ e $\Delta = \{1/2, 3/4\}$, allora una partizione estesa $\Delta^\star$ associata a $S_4(\Delta)$ è data da:

$$\{t_{-3} = -3/4, t_{-2} = -1/2, t_{-1} = -1/4,$$
$$t_0 = 0, t_1 = 1/2, t_2 = 3/4, t_3 = 1,$$
$$t_4 = 5/4, t_5 = 3/2, t_6 = 7/4\}$$

Definizione 1.5 (Funzioni B-spline normalizzate) *Data una partizione estesa $\Delta^\star$ associata allo spazio $S_m(\Delta)$, si definisce l'insieme delle funzioni B-spline Normalizzate*

$$\{N_{i,m}(x)\}_{i=-m+1,\ldots,k}$$

mediante la seguente formula ricorrente:

$$N_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+h-1}-t_i} N_{i,h-1}(x) + \frac{t_{i+h}-x}{t_{i+h}-t_{i+1}} N_{i+1,h-1}(x) & \textit{se } t_i \neq t_{i+h} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

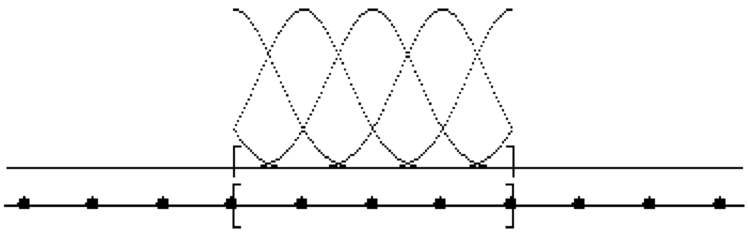

Figura 1.1: B-spline cubiche con nodi aggiuntivi distinti

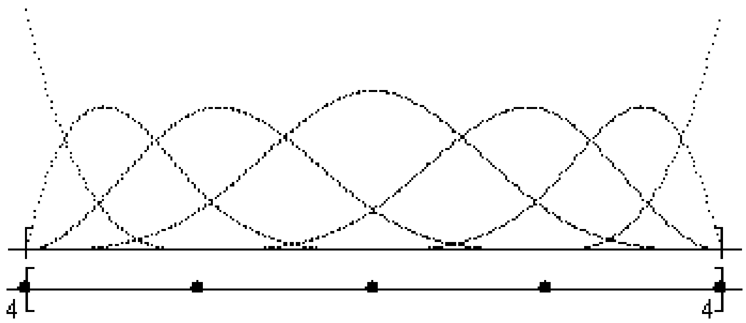

Figura 1.2: B-spline cubiche con nodi aggiuntivi coincidenti

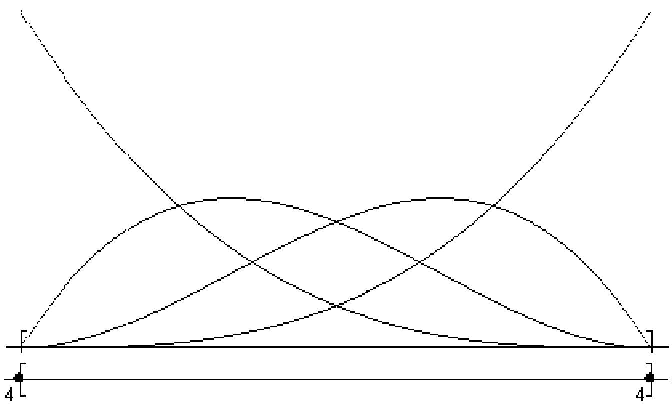

Figura 1.3: B-spline cubiche senza nodi interni e con nodi aggiuntivi coincidenti

per $h = 2, \ldots, m$, *dove*

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & t_i \le x < t_{i+1} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

dove casi di 0/0 devono essere interpretati come 0.

Osservazioni

- Se $\Delta \equiv \emptyset$ le funzioni $N_{i,m}(x)$ sono i polinomi di Bernstein sull'intervallo $[a, b]$. Infatti la formula ricorrente per le B-spline Normalizzate, senza nodi interni e con nodi aggiuntivi coincidenti in a e in b reindicizzati [1], si semplifica in:

$$N_{i,m}(x) = \frac{(x-a)}{b-a} N_{i-1,m-1}(x) + \frac{(b-x)}{b-a} N_{i,m-1}(x)$$

  per $i = 1, \ldots, m$ con $N_{1,1}(x) = 1$, mentre $N_{i,k}(x) = 0 \ \forall i \notin [1, m]$. Allora $N_{i+1,m}(x) \equiv B_{i,n}(x)$ polinomi di Bernstein, per $i = 0, \ldots, n$ e $n = m - 1$.

- Le funzioni $N_{i,m}(x) \in S_m(\Delta)$. Si verifichi che in ogni intervallo $[x_i, x_{i+1})$ sono polinomi di ordine m e in ogni nodo x_i ci sia il raccordo richiesto.

Proprietà delle B-spline Normalizzate

1. **Supporto locale**

$$N_{i,m}(x) = 0 \qquad \forall x \notin [t_i, t_{i+m}) \ \text{ se } \ t_i < t_{i+m}$$

2. **Non negatività**

$$N_{i,m}(x) > 0 \qquad \forall x \in (t_i, t_{i+m}), \quad t_i < t_{i+m}$$

   L'intervallo $[t_i, t_{i+m})$ è detto *supporto* della funzione di base i-esima;

3. **Partizione dell'unità**
   Le B-spline Normalizzate sono una partizione dell'unità, cioè:

$$\sum_{i=-m+1}^{k} N_{i,m}(x) = 1 \qquad \forall x \in [a, b]$$

[1] Nella formula ricorrente le B-spline a destra, essendo di ordine $m-1$, sono indicizzate su una partizione nodale con $m-1$ nodi aggiuntivi, mentre la B-spline a sinistra, essendo di ordine m, è indicizzata su una partizione nodale con m nodi aggiuntivi

Osservazioni

1. Poiché le B-spline Normalizzate formano una base per $S_m(\Delta)$, ogni spline $s(x)$ di tale spazio può essere espressa nella base delle B-spline, cioè:

$$s(x) = \sum_{i=-m+1}^{k} c_i N_{i,m}(x) \qquad x \in [a, b].$$

   In particolare, per la proprietà 1 delle $N_{i,m}(x)$, se $x \in [t_l, t_{l+1})$ risulta che:

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^{l} c_i N_{i,m}(x)$$

2. Per le proprietà 2 e 3, ogni $s(x)$, se espressa nella base delle B-spline Normalizzate, risulta una combinazione convessa dei coefficienti c_i; per cui il valore assunto dalla funzione spline in un punto $x \in [a, b]$ è sempre compreso tra il valore minimo e massimo dei c_i, ovvero:

$$min_{i=-m+1,\ldots,k}\{c_i\} \leq s(x) \leq max_{i=-m+1,\ldots,k}\{c_i\} \quad x \in [a, b].$$

   Ancora, per la proprietà di localizzazione della spline, risulta che:

$$min_{i=l-m+1,\ldots,l}\{c_i\} \leq s(x) \leq max_{i=l-m+1,\ldots,l}\{c_i\} \quad x \in [t_l, t_{l+1}).$$

1.2 Valutazione delle funzioni spline

Il problema consiste nel determinare il valore che una assegnata spline assume in corrispondenza di un certo punto $\overline{x} \in [a, b]$. Si individui l'intervallo $[t_l, t_{l+1})$ contenente $\overline{x}$. Quindi sarà:

$$s(\overline{x}) = \sum_{i=l-m+1}^{l} c_i N_{i,m}(\overline{x})$$

```
function l=findint(g,t,x)
%determina l'indice dell'intervallo nodale contenente il punto
%assegnato; se x e' un vettore di punti l sara' un vettore di
%indici.
%g --> grado della spline
%t --> vettore dei nodi
%x --> vettore dei punti
%l <-- vettore di indici
nt=length(t);
```

```
m=length(x);
for i=1:m
  l(i)=g+1;
  k=nt-g;
  while (k-l(i)>1)
    mid=fix((l(i)+k)./2);
    if (x(i)<t(mid))
      k=mid;
    else
      l(i)=mid;
    end
  end
end
```

1.2.1 Algoritmo 1

Si vuole procedere alla valutazione delle funzioni base in $\overline{x}$ mediante la formula ricorrente che le definisce. Si valuta la sola funzione $N_{l,1}$ non nulla in $\overline{x}$, quindi le sole due funzioni $N_{l-1,2}$ e $N_{l,2}$ non nulle in $\overline{x}$, e procedendo così si arrivano a determinare le m funzioni base di indici da $l-m+1$ ad l non nulle in $\overline{x}$ secondo il seguente schema triangolare:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{l,1}(\overline{x}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & N_{l-1,2}(\overline{x}) & N_{l,2}(\overline{x}) & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & N_{l-m+2,m-1}(\overline{x}) & \cdots & \cdots & N_{l,m-1}(\overline{x}) & 0 \\
0 & N_{l-m+1,m}(\overline{x}) & \cdots & \cdots & \cdots & N_{l,m}(\overline{x}) & 0
\end{array}
$$

```
function bs=bspl(g,t,x)
% calcola le funzioni base (non nulle) in un punto;
% se x e' un vettore torna una matrice; in ogni riga ci sono
% i valori delle funzioni base in un punto.
% g --> grado della spline
% t --> vettore dei nodi
% x --> vettore di punti
% bs <-- matrice delle funzioni B-spline nei punti
ll=findint(g,t,x);
nt=length(t);
m=length(x);
n=nt-g-1;
bs=zeros(m,n);
```

```
for ii=1:m
 l=ll(ii);
 bs(ii,l)=1.0;
 k=l;
 for i=1:g
   temp=0.0;
   for j=l:k
     d1=x(ii)-t(j);
     d2=t(i+j)-x(ii);
     beta=bs(ii,j)./(d1+d2);
     bs(ii,j-1)=d2.*beta+temp;
     temp=d1.*beta;
   end
   bs(ii,k)=temp;
   l=l-1;
  end
end
```

Questa implementazione deriva dal riscrivere la formula ricorrente delle $N_{i,m}(x)$ così:

$$N_{i,h}(x) = (x - t_i)\beta_{i,h-1}(x) + (t_{i+h} - x)\beta_{i+1,h-1}(x)$$

per $h = 2, \ldots, m$, dove

$$\beta_{i,h}(x) = \begin{cases} \frac{N_{i,h}(x)}{t_{i+h}-t_i} & \text{se } t_i \neq t_{i+h} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

È ora banale osservare che nello schema triangolare per calcolare tutte le $N_{i,h}$ non nulle in $\overline{x}$, due $N_{i,h}(x)$ adiacenti su una riga avranno in comune un $\beta_{i,h}(\overline{x})$. L'implementazione proposta calcola tali $\beta_{i,h}(\overline{x})$ una sola volta. L'implementazione proposta non si accorge se $\overline{x}$ coincide con un nodo e quindi non evita, in questo caso, calcoli inutili.

Si valuta quindi la combinazione lineare con i coefficienti c_i.

```
function y=spl2val(c,t,x)
% calcola il valore di una spline definita dai coefficienti
% c e dai nodi t nei punti x mediante combinazione lineare
```

```
% delle Bspline; chiama function bspl.m per le funz. base
% c --> coefficienti della spline
% t --> vettore dei nodi
% x --> vettore dei punti
% y <-- valore della spline nei punti
n=length(c);
nt=length(t);
g=nt-n-1;
bs=bspl(g,t,x);
m=length(x);
y=bs*c;
```

La complessità computazionale è di $3m(m-1)/2$ moltiplicazioni e divisioni e $2m(m-1)$ addizioni e sottrazioni per valutare tutte le $N_{i,m}$ non nulle, più m moltiplicazioni ed $m-1$ addizioni per la combinazione lineare finale.

Osservazioni

- Se $\overline{x} \neq t_l$ per $l = m, \dots, k+1$, per definizione di spline risulterà $s(\overline{x}^-) = s(\overline{x}^+)$ (cioè ($\lim_{x \to \overline{x}^-} s(x) \equiv \lim_{x \to \overline{x}^+} s(x)$).
- Se $\overline{x} = x_l$, per definizione di spline, $s(x_l^-) \equiv s(x_l^+)$ se $m > 1$; questo implica che se calcoliamo $s(x_l^-)$ e $s(x_l^+)$ (cioè effettuaiamo il limite per $x \to x_l^-$ e $x \to x_l^+$ nella formula ricorrente) otterremo lo stesso valore; in pratica $x_l^- \in [x_{l-1}, x_l)$ e $x_l^+ \in [x_l, x_{l+1})$ e perciò per $s(x_l^-)$ sarà $N_{l-1,1}(x_l^-) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^-) = 0$ per $i \neq l-1$ e per $s(x_l^+)$ sarà $N_{l,1}(x_l^+) = 1$ e $N_{i,1}(x_l^+) = 0$ per $i \neq l$
- Se $\overline{x} = b$ e si sceglie la partizione estesa con

  $$b = x_{m+k+1} = \cdots = x_{2m+k}$$

  il valore della spline in b, per convenzione, sará dato da: $s(b) = s(b^-) = \lim_{x \to b^-} s(x)$. Questo può essere gestito assumendo $\overline{x} \in [x_k, b)$ e applicando l'algoritmo visto.

1.2.2 Algoritmo 2

Vediamo un secondo algoritmo per la valutazione di una funzione spline, basato su una formula ricorrente sui coefficienti. Sapendo che

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^{l} c_i N_{i,m}(x)$$

per $x \in [t_l, t_{l+1})$ e sostituendo alla $N_{i,m}$ la sua definizione ricorrente in termini di funzioni base di ordine inferiore si ottiene:

$$s(x) = \sum_{i=l-m+1}^{l} c_i \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} + \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1} =$$

$$= \sum_{i=l-m+2}^{l} c_i \frac{x - t_i}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} + \sum_{i=l-m+2}^{l} c_{i-1} \frac{t_{i+m} - x}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1} =$$

$$\sum_{i=l-m+2}^{l} \frac{c_i(x - t_i) + c_{i-1}(t_{i+m-1} - x)}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1}(x) =$$

$$= \sum_{i=l-m+2}^{l} c_i^{(1)} N_{i,m-1}(x)$$

dove si è riscritto il valore della spline in un punto in termini di funzioni base di ordine $m-1$; procedendo allo stesso modo il valore della spline in un punto può essere scritta in termini di funzioni base di ordine $m-2$ e per la precisione:

$$= \sum_{i=l-m+3}^{l} c_i^{[2]} N_{i,m-2}(x)$$

procedendo nello stesso modo più volte si ottiene il valore della spline in un punto in termini di funzioni base di ordine 1 e cioè in termini di un solo coefficiente:

$$\ldots = \sum_{i=l}^{l} c_i^{[m-1]} N_{i,1}(x) = c_l^{[m-1]} N_{l,1}(x) = c_l^{[m-1]}$$

Si è ottenuto che il valore della spline calcolato in x e' quello di una spline di ordine uno per un opportuno coefficiente. Lo schema che si ottiene e' quindi il seguente:

$$\begin{array}{cccccl}
c_{l-m+1} & c_{l-m+2} & \cdots & \cdots & c_l & \\
 & c_{l-m+2}^{[1]} & \cdots & \cdots & c_l^{[1]} & \\
 & \ddots & \ldots & \ldots & \vdots & \\
 & & \ddots & \ldots & \vdots & \\
 & & & \ddots & \vdots & \\
 & & & & c_l^{[m-1]} & = s(x)
\end{array}$$

e in formule:

$$c_i^{[j]} = \frac{(x - t_i)c_i^{[j-1]}(x) + (t_{i+m-j} - x)c_{i-1}^{[j-1]}(x)}{t_{i+m-j} - t_i}$$

per $j = 1, \ldots, m-1$ e $i = l - m + j - 1, \ldots, l$, con $c_i^{[0]} := c_i$.

```
function y=spl1val(c,t,x)
% calcola il valore di una spline definita dai coefficienti
% c e dai nodi t nei punti x mediante l'algoritmo sui coeff.
% c --> coefficienti della spline
% t --> vettore dei nodi
% x --> vettore dei punti
% y <-- valore della spline nei punti
n=length(c);
nt=length(t);
g=nt-n-1;
m=length(x);
l=findint(g,t,x);
for k=1:m
 w=c;
 for j=1:g
  for i=l(k):-1:l(k)-g+j
   d1=x(k)-t(i);
   d2=t(i+g-j+1)-x(k);
   w(i)=(d1.*w(i)+d2.*w(i-1))./(d1+d2);
  end
 end
 y(k)=w(l(k));
end
```

La complessità computazionale è di $3m(m-1)$ moltiplicazioni e divisioni e di $2m(m-1)$ addizioni e sottrazioni.

1.3 Derivate delle funzioni spline

Affrontiamo ora il problema del calcolo della derivata e dell'integrale di una funzione spline $s(x) \in S_m(\Delta)$.

Teorema 1.2 *Sia $s(x) \in S_m(\Delta)$; se esiste la derivata $Ds(x)$, questa è una spline di ordine $m-1$ rispetto alla partizione Δ, cioè*

$$DS_m(\Delta) \equiv S_{m-1}(\Delta)$$

Teorema 1.3 *Sia $s(x) \in S_m(\Delta)$; allora esiste sempre la derivata $D^{(j)}s(x)$, per $j = 0, \ldots, m-2$.*

Applicando le proprietà delle derivate di una funzione, risulta che

$$Ds(x) = D(\sum_{i=-m+1}^{k} c_i N_{i,m}(x)) = \sum_{i=-m+1}^{k} c_i DN_{i,m}(x)$$

Il problema del calcolo della derivata di una funzione spline si riduce al calcolo delle derivate delle B-spline Normalizzate.

Teorema 1.4 (Formula ricorrente per le B-spline derivate) *Se $t_i < t_{i+m}$ e $m > 1$, risulta:*

$$DN_{i,m}(x) = (m-1)\left(\frac{N_{i,m-1}(x)}{t_{i+m-1} - t_i} - \frac{N_{i+1,m-1}(x)}{t_{i+m} - t_{i+1}}\right) \tag{1.1}$$

Dalla (1.1) appare evidente che la derivata della i-esima B-spline normalizzata viene espressa in funzione di B-spline di ordine $m-1$, e quindi la derivata della spline $s(x)$ è una spline di ordine inferiore. Possiamo quindi determinare la rappresentazione di $Ds(x)$ nella base delle B-spline Normalizzate di ordine $m-1$:

$$Ds(x) = \sum_{i=-m+2}^{k} c_i^{(1)} N_{i,m-1}(x)$$

dove i coefficienti $c_i^{(1)}$ si possono ricavare dalla seguente relazione:

$$c_i^{(1)} = \begin{cases} (m-1)\dfrac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+m-1} - t_i} & t_i < t_{i+m-1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione Si possono calcolare anche le derivate di ordine superiore sia calcolando le derivate di ordine superiore delle B-spline che determinando la spline di ordine inferiore derivata:

$$D^{(j)}s(x) = \sum_{i=-m+j+1}^{k} c_i^{(j)} N_{i,m-j}(x)$$

Usando la formula per i coefficienti, risulta:

$$c_i^{(j)} = \begin{cases} (m-j)\dfrac{c_i^{(j-1)} - c_{i-1}^{(j-1)}}{t_{i+m-j} - t_i} & t_i < t_{i+m-j} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1.4 Antiderivata delle funzioni spline

Affrontiamo ora il problema dell'integrazione di una funzione spline: essendo l'operatore di integrazione l'inverso dell'operatore di derivazione, l'integrale di una spline $s(x) \in S_{m-1}(\Delta)$ sarà una spline di ordine superiore, cioè:

$$\int s(x)\, dx \in S_m(\Delta)$$

Usando ancora la formula sui coefficienti, si può calcolare la primitiva di una funzione spline $s(x) \in S_{m-1}(\Delta)$

$$D^{(-1)}s(x) = \sum_{i=-m+1}^{k} c_i^{(-1)} N_{i,m}(x).$$

dove:

$$c_i^{(-1)} = \frac{t_{i+m-1} - t_i}{m-1} c_i + c_{i-1}^{(-1)} \quad i = -m+2, \ldots, k$$

Il primo coefficiente $c_0^{(-1)}$ viene scelto arbitrariamente; sappiamo infatti che l'integrale è unico a meno di una costante additiva, che, in questo caso, dipende dalla scelta di $c_0^{(-1)}$.

Proprietà

$$\int_{t_i}^{t_{i+m}} N_{i,m}(x)dx = \frac{t_{i+m} - t_i}{m}$$

1.5 Funzioni spline di interpolazione

Il problema di interpolazione con funzioni spline non differisce dai problemi di interpolazione con funzioni appartenenti ad un generico spazio $\mathcal{S}$ (ad esempio, lo spazio dei polinomi); in questo caso, lo spazio in cui si cerca la funzione interpolante è $S_m(\Delta)$. Nei prossimi paragrafi descriveremo alcuni metodi di interpolazione con funzioni spline.

1.5.1 Interpolazione di Lagrange

Teorema 1.5 *Lo spazio $S_m(\Delta)$ non é uno spazio di Tchebyshev.*

Dimostrazione Banalmente se $\Delta \neq \emptyset$, cioé c'é almeno un nodo, esistono funzioni appartenenti a $S_m(\Delta)$ che si annullano identicamente in un sottointervallo di $[a, b]$ e quindi hanno piú di n zeri distinti. Esempi di tali funzioni sono le B-Spline di base.

Questo teorema asserisce che assegnati i punti (x_i, y_i) per $i = 1, \ldots, m+k$ di interpolazione e scelto uno spazio $S_m(\Delta)$, in generale non esiste unica la soluzione al problema di interpolare i punti dati in questo spazio.

Teorema 1.6 (Interpolazione di Lagrange) *Sia $\Delta^\star = \{t_i\}_{i=-m+1,\ldots,m+k}$ la partizione estesa associata a $S_m(\Delta)$ e siano $\{N_{i,m}(x)\}_{i=-m+1,\ldots,k}$ le B-spline Normalizzate definite su $\Delta^\star$; siano poi, $\{x_j\}_{j=1,\ldots,m+k}$ punti di interpolazione dati in ordine crescente stretto:*

$$a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+k-1} < x_{m+k} \leq b.$$

Dati i valori $\{y_j\}_{j=1,\ldots,m+k}$, il sistema:

$$\sum_{i=-m+1}^{k} c_i N_{i,m}(x_j) = y_j \qquad j = 1, \ldots, m+k$$

ha un'unica soluzione $c_i \quad i = -m+1, \ldots, k$ se e solo se tutti i valori $N_{j,m}(x_{j+m})$ per $j = -m+1, \ldots, k$ non sono nulli.

Osservazione $N_{j,m}(x_{j+m}) \neq 0$ se x_{j+m} appartiene al supporto di $N_{j,m}$; ciò equivale a richiedere che:

1.

$$t_j < x_{j+m} < t_{j+m} \;\; \textit{se} \;\; t_j < t_{j+m-1}$$

2.

$$t_j \leq x_{j+m} < t_{j+m} \quad se \quad t_j \equiv t_{j+m-1}$$

3.

$$t_j < x_{j+m} \leq t_{j+m} \quad se \quad t_{j+1} \equiv t_{j+m}$$

Le condizioni precedenti sono dette *condizioni di Schoenberg-Whitney.*
Il teorema indica come scegliere la partizione nodale affinchè l'interpolante esiste e sia unica.

Esempio Il teorema precedente asserisce che volendo interpolare $m + k$ punti distinti con una $s(x) \in S_m(\Delta)$, é necessario scegliere la partizione Δ in modo da soddisfare le condizioni di Schoenberg-Whitney. In questo esempio si vedrá una scelta conveniente dei nodi, nota come "not a knot", nel caso di interpolazione con una spline cubica (m=4).
Sia $\Delta^\star$ come segue:

$$t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0 = a = x_1 < x_2 < t_1 = x_3 < \dots$$

$$\dots < t_k = x_{k+2} < x_{k+3} < x_{k+4} = b = t_{k+1} = t_{k+2} = t_{k+3} = t_{k+4}$$

Si osservi che questa scelta soddisfa le condizioni di Schoenberg-Whitney

$$t_j < x_{j+4} < t_{j+4} \quad j = -3, \dots, k$$

Imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il seguente sistema dove per brevitá scriveremo N_i anziché $N_{i,4}$:

$$\begin{cases} c_{-3}N_{-3}(x_1) = y_1 \\ c_{-3}N_{-3}(x_2) + c_{-2}N_{-2}(x_2) + c_{-1}N_{-1}(x_2) + c_0N_0(x_2) = y_2 \\ c_{-2}N_{-2}(x_3) + c_{-1}N_{-1}(x_3) + c_0N_0(x_3) = y_3 \\ \dots \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_{k+2}) + c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+2}) + c_{k-1}N_{k-1}(x_{k+2}) = y_{k+2} \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_{k+3}) + c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+3}) + c_{k-1}N_{k-1}(x_{k+3}) + c_kN_k(x_{k+3}) = y_{k+3} \\ c_kN_k(x_{k+4}) = y_{k+4} \end{cases}$$

da cui

$$c_{-3} = y_1 \text{ e } c_k = y_{k+4}$$

sostituendole nelle altre equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} c_{-2}N_{-2}(x_2) + c_{-1}N_{-1}(x_2) + c_0N_0(x_2) = y_2 - y_1N_{-3}(x_2) \\ c_{-2}N_{-2}(x_3) + c_{-1}N_{-1}(x_3) + c_0N_0(x_3) = y_3 \\ \dots \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_{k+2}) + c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+2}) + c_{k-1}N_{k-1}(x_{k+2}) = y_{k+2} \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_{k+3}) + c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+3}) + c_{k-1}N_{k-1}(x_{k+3}) = y_{k+3} - y_kN_k(x_{k+3}) \end{cases}$$

che risulta un sistema $(k+2) \times (k+2)$ quasi tridiagonale; in forma compatta:

$$
\begin{pmatrix}
X & X & X & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\
X & X & X & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\
0 & X & X & X \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & X & X & X & 0 \\
0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 0 & X & X & X \\
0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & X & X & X
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ c_{k-3} \\ c_{k-2} \\ c_{k-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
Y \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ Y
\end{pmatrix}
$$

Osservazione In [DEB78] viene fatta la seguente proposta efficiente di scelta dei nodi nel caso di interpolazione con spline di ordine m qualunque. Assegnati i punti (x_i, y_i) per $i = 1, \ldots, m+k$ di interpolazione la partizione nodale $\Delta^\star$ viene determinata nel seguente modo:

$$
\begin{array}{l}
t_{-m+1} = \cdots = t_0 = x_1 \\
t_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j=i+1}^{i+m-1} x_j \text{ per } i = 1, \ldots, k \\
t_{k+1} = \cdots = t_{m+k} = x_{m+k}
\end{array}
$$

Questa scelta soddisfa le condizioni di Schoenberg-Whitney e la matrice del sistema lineare risulta definita positiva a banda con semibanda minore di $m-1$, cioé $N_{i,m}(x_j) \equiv 0$ se $|i-j| \geq m-1$. Il sistema lineare puó allora essere risolto mediante eliminazione di Gauss senza pivoting.

1.5.2 Spline cubiche di interpolazione

Vediamo ora alcuni tipi di interpolazione con spline cubiche di particolare interesse e non classificabili come interpolazioni di Lagrange.

Teorema 1.7 *Siano $a \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_{k+1} \equiv b$ punti di osservazione distinti in $[a, b]$ e $y_0, y_1, \ldots, y_{k+1}$ le relative osservazioni.*
Sia $S_4(\Delta)$ lo spazio delle funzioni spline cubiche definite in $[a, b]$ con partizione $\Delta = \{x_i\}_{i=1,\ldots,k}$, allora esiste una ed una sola $s(x) \in S_4(\Delta)$ per cui risulta

$$s(x_i) = y_i \textit{ per } i = 0, \ldots, k+1$$

e per cui si verifica una delle seguenti condizioni:

$$
\begin{array}{l}
a) s'(x_0) = y'_0,\ s'(x_{k+1}) = y'_{k+1} \textit{ con } y'_0 \textit{ e } y'_{k+1} \textit{ assegnati} \\
b) s''(x_0) = 0,\ s''(x_{k+1}) = 0 \\
c) s(x_0) = s(x_{k+1}),\ s'(x_0) = s'(x_{k+1}),\ s''(x_0) = s''(x_{k+1}) \textit{ se } y_0 \equiv y_{k+1}
\end{array}
$$

La spline di interpolazione si dirá **con derivata agli estremi** se soddisfa le a), **naturale** se soddisfa le b) e **periodica** se soddisfa le c).
Volendo determinare le spline cubiche di interpolazione introdotte nel teorema precedente nella base delle B-spline Normalizzate, si puó procedere nel seguente modo:

1.5.3 Derivate agli estremi

Le condizioni di interpolazione sono:

$$\begin{array}{l} s'(x_0) = y'_0 \\ s(x_i) = y_i \text{ per } i = 0, \dots, k+1 \\ s'(x_{k+1}) = y'_{k+1} \end{array}$$

Si consideri la seguente partizione estesa $\Delta^\star$:

$$t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0 = a = x_0 < t_1 = x_1 < t_2 = x_2 < \dots$$

$$\dots < t_k = x_k < t_{k+1} = b = x_{k+1} = t_{k+2} = t_{k+3} = t_{k+4}$$

Ricordando l'espressione della derivata prima di una spline

$$s'(x) = \sum_{i=-2}^{k} c_i^{(1)} N_{i,3}(x)$$

con

$$c_i^{(1)} = 3\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+3} - t_i}$$

allora sará

$$s'(x_0) = c_{-2}^{(1)} = 3\frac{c_{-2} - c_{-3}}{t_1 - t_{-2}} = 3\frac{c_{-2} - c_{-3}}{x_1 - x_0}$$

e analogamente

$$s'(x_{k+1}) = c_k^{(1)} = 3\frac{c_k - c_{k-1}}{t_{k+3} - t_k} = 3\frac{c_k - c_{k-1}}{x_{k+1} - x_k}$$

allora l'intero sistema sará:

$$\begin{cases} -c_{-3} + c_{-2} = \frac{1}{3}y'_0(x_1 - x_0) \\ c_{-3}N_{-3}(x_0) = y_0 \\ c_{-2}N_{-2}(x_1) + c_{-1}N_{-1}(x_1) + c_0N_0(x_1) = y_1 \\ \dots \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_k) + c_{k-2}N_{k-2}(x_k) + c_{k-1}N_{k-1}(x_k) = y_k \\ c_kN_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ -c_{k-1} + c_k = \frac{1}{3}y'_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente:

$$\begin{aligned}
&c_{-3} := y_0\\
&c_{-2} := \tfrac{1}{3}y_0'(x_1 - x_0) + y_0\\
&c_{k-1} := y_{k+1} - \tfrac{1}{3}y_{k+1}'(x_{k+1} - x_k)\\
&c_k := y_{k+1}
\end{aligned}$$

sostituendo nelle altre equazioni resta un sistema tridiagonale $k \times k$. In forma compatta sará:

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0\ldots\ldots0 & 0 & 0 & 0\\ X & X & X & 0\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots0 & X & X & X & & \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots\ldots0 & X & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1}\\ c_0\\ \vdots\\ c_{k-3}\\ c_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y\\ y_2\\ \vdots\\ y_{k-1}\\ Y \end{pmatrix}$$

1.5.4 Naturali

Le condizioni di interpolazione sono:

$$\begin{aligned}
&s''(x_0) = 0\\
&s(x_i) = y_i \text{ per } i = 0, \ldots, k+1\\
&s''(x_{k+1}) = 0
\end{aligned}$$

Si consideri la seguente partizione estesa $\Delta^\star$:

$$t_{-3} = t_{-2} = t_{-1} = t_0 = a = x_0 < t_1 = x_1 < t_2 = x_2 < \ldots$$

$$\ldots < t_k = x_k < t_{k+1} = b = x_{k+1} = t_{k+2} = t_{k+3} = t_{k+4}$$

Ricordando l'espressione della derivata prima di una spline

$$s'(x) = \sum_{i=-2}^{k} c_i^{(1)} N_{i,3}(x)$$

con

$$c_i^{(1)} = 3\frac{c_i - c_{i-1}}{t_{i+3} - t_i}$$

e l'espressione della derivata seconda

$$s''(x) = \sum_{i=-1}^{k} c_i^{(2)} N_{i,2}(x)$$

con

$$c_i^{(2)} = 2\frac{c_i^{(1)} - c_{i-1}^{(1)}}{t_{i+2} - t_i}$$

allora sará

$$s''(x_0) = c_{-1}^{(2)} = 2\frac{c_{-1}^{(1)} - c_{-2}^{(1)}}{t_1 - t_{-1}}$$

$$= \frac{2}{t_1 - t_{-1}}\left(3\frac{c_{-1} - c_{-2}}{t_2 - t_{-1}} - 3\frac{c_{-2} - c_{-3}}{t_1 - t_{-2}}\right)$$

$$= 6\frac{(x_1 - x_0)c_{-1} - (x_1 - 2x_0 + x_2)c_{-2} + (x_2 - x_0)c_{-3}}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)}$$

e analogamente

$$s''(x_{k+1}) = c_k^{(2)} = 2\frac{c_k^{(1)} - c_{k-1}^{(1)}}{t_{k+2} - t_k}$$

$$= \frac{2}{t_{k+2} - t_k}\left(3\frac{c_k - c_{k-1}}{t_{k+3} - t_k} - 3\frac{c_{k-1} - c_{k-2}}{t_{k+2} - t_{k-1}}\right)$$

$$= 6\frac{(x_{k+1} - x_{k-1})c_k - (2x_{k+1} - x_k - x_{k-1})c_{k-1} + (x_{k+1} - x_k)c_{k-2}}{(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_{k-1})}$$

e l'intero sistema sará:

$$\begin{cases} (x_2 - x_0)c_{-3} + (2x_0 - x_1 - x_2)c_{-2} + (x_1 - x_0)c_{-1} = 0 \\ c_{-3}N_{-3}(x_0) = y_0 \\ c_{-2}N_{-2}(x_1) + c_{-1}N_{-1}(x_1) + c_0N_0(x_1) = y_1 \\ \dots \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_k) + c_{k-2}N_{k-2}(x_k) + c_{k-1}N_{k-1}(x_k) = y_k \\ c_kN_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \\ (x_{k+1} - x_k)c_{k-1} + (x_{k-1} + x_k - 2x_{k+1})c_{k-1} + (x_{k+1} - x_{k-1})c_k = 0 \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente:

$$\begin{aligned} c_{-3} &:= y_0 \\ c_k &:= y_{k+1} \end{aligned}$$

e sostituendo nella prima ed ultima equazione si ottiene un sistema tridiagonale $(k+2) \times (k+2)$. In forma compatta sará:

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & X & X & X & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & X & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{k-2} \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ Y \end{pmatrix}$$

1.5.5 Periodiche

Le condizioni di interpolazione sono:

$$\begin{aligned} &s'(x_0) = s'(x_{k+1}) \\ &s''(x_0) = s''(x_{k+1}) \\ &s(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, k+1 \end{aligned}$$

Si consideri la seguente partizione estesa $\Delta^\star$:

$$t_0 \equiv x_0, t_1 \equiv x_1, \ldots, t_k \equiv x_k, t_{k+1} \equiv x_{k+1}$$

e i nodi aggiuntivi si determinino come segue:

$$\begin{cases} t_{-1} = a - (b - t_k) \\ t_{-2} = a - (b - t_{k-1}) \\ t_{-3} = a - (b - t_{k-2}) \\ t_{k+2} = b + (t_1 - a) \\ t_{k+3} = b + (t_2 - a) \\ t_{k+4} = b + (t_3 - a) \end{cases}$$

Allora le condizioni di periodicità saranno banalmente soddisfatte se:

$$\begin{cases} c_{-3} = c_{k-2} \\ c_{-2} = c_{k-1} \\ c_{-1} = c_k \end{cases}$$

Imponendo le condizioni di interpolazione nei punti, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} c_{-3}N_{-3}(x_0) + c_{-2}N_{-2}(x_0) + c_{-1}N_{-1}(x_0) = y_0 \\ c_{-2}N_{-2}(x_1) + c_{-1}N_{-1}(x_1) + c_0N_0(x_1) = y_1 \\ \ldots \\ c_{k-3}N_{k-3}(x_k) + c_{k-2}N_{k-2}(x_k) + c_{k-1}N_{k-1}(x_k) = y_k \\ c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+1}) + c_{k-1}N_{k-1}(x_{k+1}) + c_kN_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \end{cases}$$

Rinominando c_{-3}, c_{k-1} e c_k come c_{k-2}, c_{-2} e c_{-1} si ottiene:

$$\begin{cases} c_{-2}N_{-2}(x_0) + c_{-1}N_{-1}(x_0) + c_{k-2}N_{-3}(x_0) = y_0 \\ c_{-2}N_{-2}(x_1) + c_{-1}N_{-1}(x_1) + c_0N_0(x_1) = y_1 \\ \ldots \\ c_{-2}N_{k-1}(x_k) + c_{k-3}N_{k-3}(x_k) + c_{k-2}N_{k-2}(x_k) = y_k \\ c_{-2}N_{k-1}(x_{k+1}) + c_{-1}N_k(x_{k+1}) + c_{k-2}N_{k-2}(x_{k+1}) = y_{k+1} \end{cases}$$

Essendo poi per costruzione

$$N_{-3}(x) \equiv N_{k-2}(x), \quad N_{-2}(x) \equiv N_{k-1}(x) \quad \text{e} \quad N_{-1}(x) \equiv N_k(x)$$

la prima ed ultima equazione saranno uguali (infatti deve essere $y_0 = y_{k+1}$); non considerando l'ultima, si ottiene un sistema $(k+1) \times (k+1)$ che in forma compatta é:

$$\begin{pmatrix} X & X & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & 0 & X \\ X & X & X & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ 0 & X & X & X \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots X & X & X & 0 \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots 0 & X & X & X \\ X & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & 0 & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ c_{k-4} \\ c_{k-3} \\ c_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix}$$

1.6 Spline cubiche e proprietá di minimo

Osservazione Si dice che le spline cubiche sono "smooth" fra i nodi. Questa proprietá deriva dal prossimo teorema che dice che le spline cubiche di interpolazioni non possono avere grandi oscillazioni. Infatti la derivata prima di una funzione oscillante assume valori positivi e negativi grandi e per il teorema del valor medio allora la derivata seconda avrá valori grandi; segue che l'integrale della derivata seconda al quadrato non potrebbe essere piccolo, come invece prova il prossimo teorema.

Proprietà Le spline cubiche di interpolazione **con derivate agli estremi**, **naturali** e **periodiche** (in quest'ultimo caso la $f(x)$ che si interpola deve essere periodica, ossia $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$ e $f''(a) = f''(b)$), soddisfano la seguente proprietá di minimo che le caratterizza.

Teorema 1.8 (Proprietá di minimo) *Sia $s(x)$ la spline cubica di interpolazione* **con derivate agli estremi**, **naturale** *o* **periodica**. *Sia $f(x)$ una funzione di classe $C^2_{[a,b]}$ che soddisfi le stesse condizioni di interpolazione della $s(x)$; allora vale la seguente diseguaglianza:*

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

il segno di uguaglianza vale solo se $s(x) \equiv f(x)$.

Per la dimostrazione si veda [PRE75].

Osservazione La relazione integrale vista, consente una dimostrazione di esistenza e unicitá per la spline cubica di interpolazione di una funzione $f(x)$ con condizioni di "derivate agli estremi", "naturale" o "periodica" ([PRE75]).

Proposizione 1.1 *$s(x) \equiv 0$ é l'unica spline cubica di interpolazione con "derivate agli estremi", "naturale" o "periodica" della funzione $f(x) \equiv 0$.*

Dimostrazione Sia $s(x)$ una spline cubica di interpolazione con "derivate agli estremi", "naturale" o "periodica" della funzione nulla. Allora $s(x)$ soddisfa la relazione integrale. Segue che $s''(x) \equiv 0$ in $[a, b]$. Ma allora $s(x)$ é un polinomio di grado 1 su $[a, b]$. Poiché per interpolazione deve essere $s(a) = 0$ ed $s(b) = 0$ si trova che $s(x) \equiv 0$ su $[a, b]$.

E' ora facile provare il seguente teorema.

Teorema 1.9 (Esistenza e unicitá) *La spline cubica interpolante con "derivate agli estremi", "naturale" o "periodica" esiste ed é unica.*

Dimostrazione Supponiamo che il sistema di equazioni da risolvere imponendo le condizioni di interpolazioni sia

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

dove A é la matrice dei coefficienti $(k+4) \times (k+4)$. E' chiaro che la A é indipendente dalla funzione da interpolare e resterá uguale qualunque sia la funzione da interpolare.
Poiché $s(x) \equiv 0$ é l'unica spline cubica interpolante di $f(x) \equiv 0$, sará $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e da $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ (avendo una ed una sola soluzione) si deduce che A deve essere non singolare. Ma allora $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione $\forall \mathbf{b}$.

Teorema 1.10 (Convergenza) *Sia $s(x)$ la spline cubica di interpolazione con "derivate agli estremi", "naturale" o "periodica" di una funzione $f(x)$ di classe $C^2_{[a,b]}$. Allora posto $E(x) = f(x) - s(x)$ per $x \in [a, b]$, si ha:*

$$|E(x)| = |f(x) - s(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b (f''(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \quad x \in [a, b]$$

$$|E'(x)| = |f'(x) - s'(x)| \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f''(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \quad x \in [a, b]$$

con $h = \max_{1 \leq i \leq k+1}(x_i - x_{i-1})$.

Per la dimostrazione si veda [PRE75].

Osservazione Questo teorema asserisce che all'aumentare dei punti di interpolazione, la spline cubica di interpolazione converge alla funzione da interpolare. Ancora la derivata della spline cubica interpolante converge alla derivata della funzione da interpolare.

1.7 Funzioni spline di approssimazione

Possiamo utilizzare le funzioni spline per risolvere problemi di approssimazione in norma. In particolare, il problema di approssimazione che si vuole affrontare è quello in norma 2 (minimi quadrati) nel caso discreto (approssimazione di un insieme di punti).

Osservazione

Tale problema si riferisce al caso in cui:

$$n \gg m + k$$

dove n è il numero dei punti ed $m + k$ la dimensione di $S_m(\Delta)$, spazio in cui si cerca l'approssimante.

1.7.1 Approssimazione ai minimi quadrati.

Dato l'insieme $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ tale che:

$$a \equiv x_1 < \ldots < x_n \equiv b$$

e le osservazioni $y_1, \ldots, y_n$, si cerca la spline $s(x) \in S_m(\Delta)$, nella base delle B-spline Normalizzate ($s(x) = \sum_{i=-m+1}^{k} c_i N_{i,m}(x)$), che renda minima l'espressione

$$\sum_{l=1}^{n} (y_l - s(x_l))^2$$

Si dimostra che esiste sempre una soluzione; l'unicità nel caso discreto deve essere verificata di volta in volta.
Si dimostra con semplici calcoli che la soluzione al problema di minimizzare la 1.7.1 coincide con la soluzione del seguente sistema lineare sovradeterminato:

$$\sum_{j=-m+1}^{k} c_j \sum_{l=1}^{n} N_{i,m}(x_l) N_{j,m}(x_l) = \sum_{l=1}^{n} y_l N_{i,m}(x_l) \quad \forall \;\; i = -m+1, \ldots, k$$

Possiamo scrivere ciò in forma matriciale come $G\mathbf{c} = \mathbf{b}$.
Sia H la matrice delle funzioni base calcolate nei punti di approssimazione:

$$H = \{h_{l,j}\} = \{N_{j,m}(x_l)\} \;\; l = 1, \ldots, n; \;\; j = -m+1, \ldots, k$$

allora, la matrice G può essere espressa come $G = H^T H$, cioè:

$$G = \{g_{i,j}\} = \{\sum_{l=1}^{n} N_{i,m}(x_l) N_{j,m}(x_l)\}_{i,j=-m+1,\ldots,k}$$

La dimensione di H è $n \times (m+k)$. Se H ha rango massimo, allora G è non singolare e, perciò, il sistema ha un'unica soluzione; H ha rango massimo se dagli n punti di approssimazione si possono estrarre $m+k$ punti con cui risolvere il problema di interpolazione; se esistono abbiamo trovato un minore $(m+k) \times (m+k)$ con determinante diverso da zero; perché ciò sia vero, bisogna che siano soddisfatte le condizioni di Schonberg-Whitney su almeno $m+k$ punti:

Teorema 1.11 *La matrice H ha rango massimo se esiste una successione di indici* $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{m+k} \leq n$ *per cui:*

$$t_i < x_{j_i} < t_{i+m}, \quad i = -m+1, \ldots, k$$
$$(condizioni \quad di \quad Schoenberg - Whitney)$$

dove i t_i *sono i nodi della partizione estesa* $\Delta^\star$.

Bibliografia

[STO97] J.Stoer, R.Bulirisch. *Introduction to Numerical Analisysy* (second edition), Springer Verlag (1997).

[DEB78] C.de Boor. *A practical guide to splines*, Springer Verlag (1978).

[NUR89] G.Nurnberger. *Approximation by Spline Functions*, Springer Verlag (1989).

[SHU81] L.L.Shumaker. *Spline functions basic theory*, John Wiley & Sons (1981).

[PRE75] P.M.Prenter. *Spline and Variational Methods*, John Wiley & Sons (1975).