ARGOMENTI DEL CORSO

ANALISI NUMERICA

A.A. 2000/2001

Funzioni Polinomiali nella base di Bernstein

Giulio Casciola

febbraio 2001
rivisto e corretto ottobre 2001

Indice

1 Funzioni polinomiali nella base di Bernstein **5**

1.1 Polinomi base di Berstein 5

1.2 Formula ricorrente per i polinomi di Bernstein 7

1.3 Approssimazione uniforme 8

1.4 Proprietà dei polinomi di Bernstein 9

1.5 Significato geometrico dei coefficienti 10

1.6 Curve di Bézier 12

1.7 Algoritmo di de Casteljau e valutazione numerica 13

1.8 Interpretazione geometrica dell'algoritmo di de Casteljau . 15

1.9 Derivata di un polinomio nella base di Bernstein 17

1.10 Antiderivata e integrazione 19

1.11 Conversione di base 20

1.12 Formulazione matriciale 24

1.13 Conversione di base da Bernstein in $[a, b]$ a Bernstein in $[c, d]$ 25

1.14 Conversione di base da Bernstein in $[0, 1]$ a Bernstein in $[0, c]$ con $c < 1$ 26

1.15 Suddivisione di un polinomio nella base di Bernstein 29

1.16 Elevamento di grado 29

1.17 Riduzione di grado 31

1.18 Interpolazione polinomiale 32

1.19 Localizzazione e determinazione delle radici di un polinomio 35

Capitolo 1

Funzioni polinomiali nella base di Bernstein

1.1 Polinomi base di Berstein

Di un polinomio a coefficienti reali definito sull'intero asse reale può essere interessante limitarne lo studio su un intervallo chiuso e limitato. In tal caso risulta conveniente esprimere tale polinomio in una base che tenga conto dell'informazione aggiuntiva consistente nell'intervallo in cui lo si vuole studiare. Dal punto di vista numerico si è sempre in questa situazione in quanto assegnato un polinomio viene anche dato l'intervallo di definizione intendendo proprio che si è interessati solo a cosa succede di quel polinomio in quell'intervallo. Dal punto di vista numerico risulta quindi naturale definire un polinomio in una base su un intervallo come per esempio la base di Bernstein.

Sia

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x) \quad x \in [a,b]$$

dove $B_{i,n}(x)_{i=0,\ldots,n}$ sono i polinomi base di Bernstein di grado n sull'intervallo $[a,b]$ e definiti come:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(b-x)^{n-i}(x-a)^i}{(b-a)^n} \quad i = 0,\ldots,n$$

e $c_0, c_1, \ldots, c_n \in I\!R$ sono i coefficienti nella base di Berstein.

Poichè i polinomi sono invarianti per traslazione e scala nell'intervallo di definizione, nelle applicazioni si utilizzano quasi esclusivamente in $[0,1]$;

a questo caso ci si può sempre ricondurre mediante un cambio di variabile:

$$x \in [a,b] \to t \in [0,1], \quad t = \frac{x-a}{b-a}, \quad x = a + t(b-a)$$

Infatti si ha:

$$B_{i,n}(x) = B_{i,n}(a+t(b-a)) = \binom{n}{i} \frac{[b-a-t(b-a)]^{n-i}[a+t(b-a)-a]^i}{(b-a)^n} =$$

$$= \binom{n}{i} \frac{[(b-a)(1-t)]^{n-i}[t(b-a)]^i}{(b-a)^n} =$$

$$\binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i = B_{i,n}(t)$$

Riassumendo, avremo

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

che dice che un cambio di variabile, per un polinomio nella base di Bernstein, non comporta alcun costo computazionale sui coefficienti che restano i medesimi. Il vantaggio è che in $[0,1]$ i polinomi di Bernstein sono più semplici da calcolare e la valutazione di un polinomio risulta in genere più stabile dal punto di vista numerico.

Se si vuole valutare $p(x)$ per $x = \bar{x}$, si determina $\bar{t} := \frac{\bar{x}-a}{(b-a)}$, poi si valuta $p(\bar{t})$, quindi sarà $p(\bar{x}) := p(\bar{t})$.

Osservazione Come già detto sopra, in $[0,1]$ i polinomi di Bernstein risultano definiti da:

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i \quad i = 0, \ldots, n$$

Esempio Polinomi di Bernstein di grado 2 e 3:

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,2}(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,2}(t) = t^2;$$

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3, \quad B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t), \quad B_{3,3}(t) = t^3;$$

vedi Fig.1.1 [1]

[1] Le figure presentate in queste dispense sono state realizzate con il pacchetto *xccurv* del sistema *xcmodel* versione 2.0 ed eventualmente ritoccate col pacchetto free GIMP per l'aggiunta di simboli e scritte.

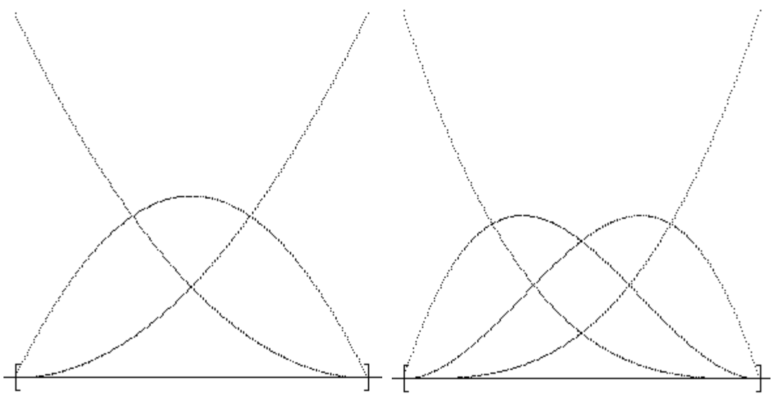

Figura 1.1: Polinomi di Bernstein di grado 2 (sinistra) e di grado 3 (destra).

1.2 Formula ricorrente per i polinomi di Bernstein

I polinomi di Bernstein di grado n definiti su un intervallo $[a, b]$, sono legati ai polinomi di Bernstein di grado $n-1$ definiti su $[a, b]$, dalla seguente formula ricorrente

$$B_{i,n}(x) = \frac{x-a}{b-a} B_{i-1,n-1}(x) + \frac{b-x}{b-a} B_{i,n-1}(x)$$

con $B_{0,0}(x) = 1$ e $B_{i,n}(x) = 0 \quad \forall i \notin [0, n]$.

Banalmente, nel caso di polinomi di Bernstein definiti su $[0, 1]$, tale formula si semplifica in:

$$B_{i,n}(t) = tB_{i-1,n-1}(t) + (1-t)B_{i,n-1}(t)$$

con $B_{0,0}(t) = 1$ e $B_{i,n}(t) = 0 \quad \forall i \notin [0, n]$.

Viene riportato il codice Matlab che implementa la formula ricorrente per i polinomi di Bernstein in [0,1] per il loro calcolo in un punto o in un array di punti.

```
function bs=bernst(n,x)
% calcola i polinomi di Bernstein in [0,1] in un punto x;
% se x e' un vettore di punti torna una matrice di valori;
% n  --> grado del polinomio
% x  --> valore di un punto o vettore di punti
```

```
% bs <-- matrice dei polinomi di bernstein nei punti
m=length(x);
np1=n+1;
bs=zeros(m,np1);
for ii=1:m
 l=np1;
 bs(ii,l)=1.0;
 for i=1:n
   temp=0.0;
   for j=l:np1
     d1=x(ii);
     d2=1.0-x(ii);
     beta=bs(ii,j);
     bs(ii,j-1)=d2.*beta+temp;
     temp=d1.*beta;
   end
   bs(ii,np1)=temp;
   l=l-1;
  end
end
```

Esempio Polinomi di Bernstein di grado 3 mediante formula ricorrente:

$$\begin{array}{llll}
B_{0,0}(t) = 1 & & & \\
B_{0,1}(t) = (1-t) & B_{1,1}(t) = t & & \\
B_{0,2}(t) = (1-t)^2 & B_{1,2}(t) = 2t(1-t) & B_{2,2}(t) = t^2 & \\
B_{0,3}(t) = (1-t)^3 & B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2 & B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t) & B_{3,3}(t) = t^3
\end{array}$$

1.3 Approssimazione uniforme

I polinomi di Bernstein furono originariamente introdotti nell'approssimazione di funzioni continue $f(x)$ su un intervallo $[a, b]$. Dati $n + 1$ punti di $f(x)$ equidistanti in $[a, b]$, l'approssimazione di Bernstein di grado n, $B_n[f(x)]$ di $f(x)$ è definita come

$$B_n[f(x)] = \sum_{i=0}^{n} f(a + i(b - a)/n) B_{i,n}(x)$$

con $B_{i,n}(x)$ i polinomi di Bernstein di grado n in $[a, b]$. Questa approssimazione può essere costruita soddisfando un qualunque errore δ usando polinomi di grado sufficientemente elevato, cioè esiste un valore n_δ tale che:

$$|B_n[f(x)] - f(x)| < \delta$$

$\forall x \in [a, b]$ quando $n > n_\delta$. Così si dice che l'approssimazione di Bernstein converge uniformemente ad $f(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n[f(x)] = f(x)$$

su $[a, b]$. Questa proprietà della base di Bernstein permette di dimostrare il teorema di Weierstrass che una funzione continua su un intervallo può essere approssimata con una data tolleranza da un polinomio di opportuno grado n.

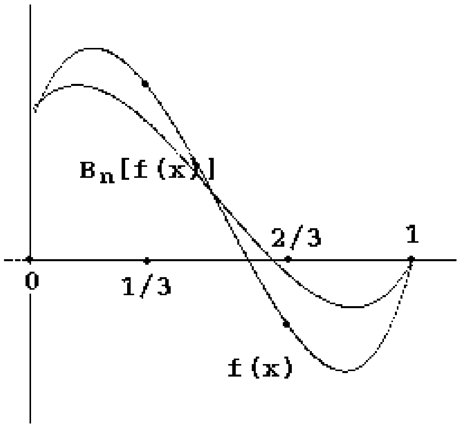

Figura 1.2: Polinomio di approssimazione di Bernstein di grado $n = 3$ in $[0, 1]$.

1.4 Proprietà dei polinomi di Bernstein

Le $B_{i,n}(x)$ godono di alcune interessanti proprietà:

- $B_{i,n}(x) \geq 0$ i=0,..., n $\quad \forall x \in [a, b]$;
- Partizione dell'unità:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(x) = 1 \ \forall x \in [a, b]$$

- Per le proprietà precedenti, $p(x)$ se espresso nella base di Bernstein è una combinazione convessa dei c_i, allora

$$min\{c_i\} \leq p(x) \leq max\{c_i\} \, \forall \, x \in [a, b].$$

Osservazione Una combinazione lineare si dice affine se la somma dei coefficienti è 1 ($\sum B_{i,n}(x) = 1$), se poi questi sono non negativi ($0 \geq B_{i,n}(x) \leq 1$) allora si dice combinazione convessa.

- Variazione di segno dei coefficienti:
un polinomio espresso nella base di Bernstein ha un numero di variazioni di segno minore o uguale al numero di variazione di segno del vettore dei suoi coefficienti (valori o coefficienti nulli non vengono considerati).

- L'approssimazione vista di una funzione $f(x)$ continua con polinomi nella base di Bernstein, gode della proprietà della *precisione lineare*; cioè se la $f(x)$ è una funzione lineare ($a_0 + a_1x$), allora il polinomio di approssimazione di Bernstein riproduce tale funzione.
Infatti utilizzando la proprietà della partizione dell'unità vista e la seguente relazione

$$x = \sum_{i=0}^{n}(a + \frac{i}{n}(b - a))B_{i,n}(x) \quad x \in [a, b]$$

che verrà dimostrata nelle sezione 1.11 nel caso di $[a, b] = [0, 1]$, si ha:

$$\begin{aligned} B_n[a_0 + a_1x] &= \sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1(a + \frac{i}{n}(b - a)))B_{i,n}(x) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_0B_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^{n} a_1(a + \frac{i}{n}(b - a))B_{i,n}(x) = \\ &= a_0 + a_1x \end{aligned}$$

Questo dimostra quanto volevamo.

1.5 Significato geometrico dei coefficienti

Dalla relazione prima vista

$$B_n[f(x)] = \sum_{i=0}^{n} f(a + i(b - a)/n)B_{i,n}(x) \quad x \in [a, b]$$

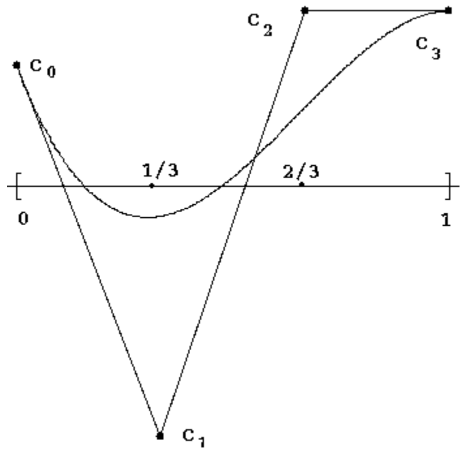

Figura 1.3: Significato geometrico; caso $n = 3$

segue che considerata come f una funzione lineare a tratti o spezzata di vertici i punti $(a + \frac{i}{n}(b - a), c_i) \quad i = 0, \ldots, n$, allora il polinomio

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(x)$$

può essere interpretato come una approssimazione di tale spezzata, ed in particolare

$$p(a) = c_0 \quad \text{e} \quad \mathrm{p(b) = c_n}.$$

In questo modo i coefficienti di un polinomio nella base di Bernstein possono essere interpretati come i valori di una funzione continua in corrispondenza delle ascisse $(a + \frac{i}{n}(b - a))$. La ragione per cui la funzione che si considera è una lineare a tratti non è per questione di semplicità , ma per la proprietà della precisione lineare vista; infatti se i punti $(a + \frac{i}{n}(b - a), c_i) \quad i = 0, \ldots, n$ sono allineati, allora $p(x)$ è il polinomio lineare che li approssima perfettamente interpolandoli.
La funzione lineare a tratti così definita verrà detta *poligono di controllo* del polinomio $p(t)$.
Le proprietà prima viste sui polinomi di Berstein si possono tradurre in proprietà geometriche sul grafico del polinomio; proprietà del *guscio convesso* che dice che il grafico del polinomio $p(t)$ è contenuto nel più piccolo poligono convesso definito dai vertici del poligono di controllo; proprietà dell' *approssimazione di forma* della poligonale che deriva dal fatto che una qualunque funzione lineare avrà un numero di intersezioni con il po-

ligono di controllo minore o uguale al numero di intersezioni che ha con il polinomio stesso.

1.6 Curve di Bézier

Bézier fu l'ideatore di uno dei primi sistemi CAD, UNISURF, usato dalla casa automobilistica francese Renault. La teoria delle curve di Bézier, su cui era basato UNISURF, nasce dal rappresentare un polinomio nella base di Bernstein.
Una curva piana di Bézier $\mathbf{C}(u)$ di grado n può essere definita a partire da un insieme di punti di controllo $P_i \in R^2 \quad i = 0, \ldots, n$ ed è data da

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(u) \quad u \in [0,1].$$

Si consideri per esempio una curva di grado 3. La figura 1.4 mostra una tale curva e i punti di controllo associati P_0, P_1, P_2 e P_3. Si può vedere

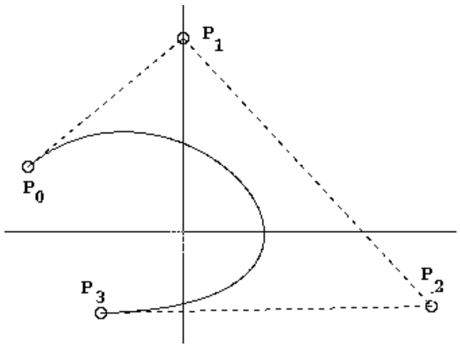

Figura 1.4: Esempio di Curva di Bézier; caso $n = 3$

semplicemente che i punti estremi della curva coincidono con P_0 e P_3 e che i punti di controllo non sono punti della curva.
Spostando i punti di controllo si influenza la forma della curva; la figura 1.5 mostra l'effetto di spostare P_1 della curva precedente.
E' facile pensare ad un programma interattivo che permetta ad un utente di muovere un punto di controllo e quindi deformare la curva in una maniera che risulta subito intuitiva. Questa semplice possibilità offerta dai punti di controllo è il fondamento dell'importanza e utilità pratica delle curve di Bézier. La forma della curva è determinata univocamente dalla

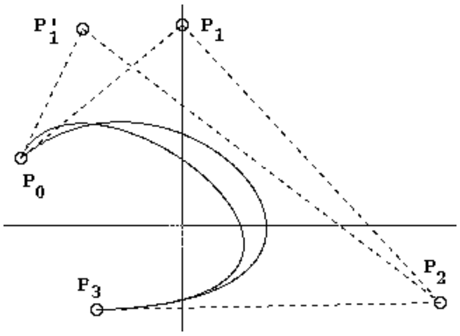

Figura 1.5: Esempio di Curva di Bézier; caso $n = 3$. Modifica di forma mediante spostamento di un punto di controllo.

posizione dei punti di controllo. Tutt'oggi le curve di Bézier sono utilizzate in molti sistemi CAD, sistemi di disegno e software o linguaggi grafici come Adobe Illustrator, Postscript e tanti altri.

1.7 Algoritmo di de Casteljau e valutazione numerica

Per valutare un polinomio nella base di Bernstein si può utilizzare l'algoritmo di de Casteljau sui coefficienti del polinomio, che consiste nell'applicare ripetutamente la formula ricorrente vista.

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} c_i t B_{i-1,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n} c_i (1-t) B_{i,n-1}(t) =$$

poichè $B_{-1,n-1} = B_{n,n-1} = 0$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} t B_{i,n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (1-t) B_{i,n-1}(t) =$$

raccogliendo

$$= \sum_{i=0}^{n-1} [c_{i+1} t + c_i (1-t)] B_{i,n-1}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^{[1]} B_{i,n-1}(t) =$$

riapplicando la formula ricorrente più volte, alla fine si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{0} c_0^{[n]} B_{0,0}(t) = c_0^{[n]}.$$

Si ha quindi il seguente algoritmo:

$$c_i^{[j]} = tc_{i+1}^{[j-1]} + (1-t)c_i^{[j-1]}$$

con $j = 1, \ldots, n$, $i = 0, \ldots, n-j$ e $p(t) := c_0^{[n]}$.

In modo esplicito si ha il seguente schema triangolare:

$$\begin{array}{llllll}
c_0^{[0]} & c_1^{[0]} & c_2^{[0]} & \ldots & c_{n-1}^{[0]} & c_n^{[0]} \\
c_0^{[1]} & c_1^{[1]} & c_2^{[1]} & \ldots & c_{n-1}^{[1]} & \\
\ldots & & & \ldots & & \\
c_0^{[n-2]} & c_1^{[n-2]} & c_2^{[n-2]} & & & \\
c_0^{[n-1]} & c_1^{[n-1]} & & & & \\
c_0^{[n]} & & & & &
\end{array}$$

Osservazione Mediante tale algoritmo la valutazione di un polinomio nella base di Bernstein costa computazionalmente $\frac{n(n+1)}{2}$ addizioni ed $n(n+1)$ moltiplicazioni.

```
function y=decast(c,x)
% calcola il valore di un polinomio nella base di Bernstein definito in
% [0,1] dai coefficienti c nei punti x mediante l'algoritmo di de Casteljau;
% c --> coefficienti del polinomio
% x --> vettore dei punti
% y <-- valore del polinomio punti
np1=length(c);
n=np1-1;
m=length(x);
for k=1:m
 w=c;
 d1=x(k);
 d2=1.0-x(k);
 for j=1:n
  for i=np1:-1:j+1
   w(i)=(d1.*w(i)+d2.*w(i-1));
  end
 end
 y(k)=w(np1);
end
```

Osservazione Si può dimostrare [FARA88] che, per quel che riguarda la valutazione, un polinomio nella base di Bernstein è meno sensibile alla perturbazione dei coefficienti che non nella base delle potenze (errore inerente piccolo).

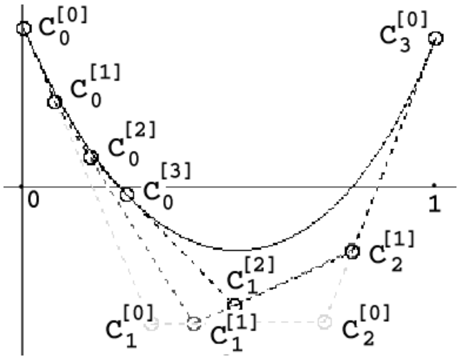

Figura 1.6: Interpretazione geometrica dell'algoritmo di de Casteljau

1.8 Interpretazione geometrica dell'algoritmo di de Casteljau

Lo schema di de Casteljau consiste, assegnato t in cui valutare il polinomio, in successive interpolazioni lineari dei coefficienti e valutazione di queste in t. Geometricamente si ottiene una sequenza di segmenti del piano che inviluppano la il grafico del polinomio ed in particolare ne individuano il punto o valore in corrispondenza dell'argomento t.

In Fig.1.6 sono mostrati tutti i coefficienti dello schema triangolare di de Casteljau per valutare un polinomio di grado 3 in $t = \frac{1}{4}$.

Esempio Sia $p(t) = 2B_{0,2}(t) - 2B_{1,2}(t) + 2B_{2,2}(t) \quad t \in [0,1]$.
Si applichi l'algoritmo di de Casteljau per valutare $p(t)$ in $t = \frac{1}{4}$:

$$c_0^{[0]} := 2, \quad c_1^{[0]} := -2, \quad c_2^{[0]} := 2$$

$$c_0^{[1]} = 2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 1; \quad c_1^{[1]} = -2\frac{3}{4} + 2\frac{1}{4} = -1;$$

$$c_0^{[2]} = 1\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

allora

$$p(\frac{1}{4}) := c_0^{[2]} = \frac{1}{2}.$$

Si applichi l'algoritmo di de Casteljau per valutare $p(t)$ in $t = \frac{1}{2}$:

$$c_0^{[1]} = 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 0; \quad c_1^{[1]} = -2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 0;$$

$$c_0^{[2]} = 0\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = 0;$$

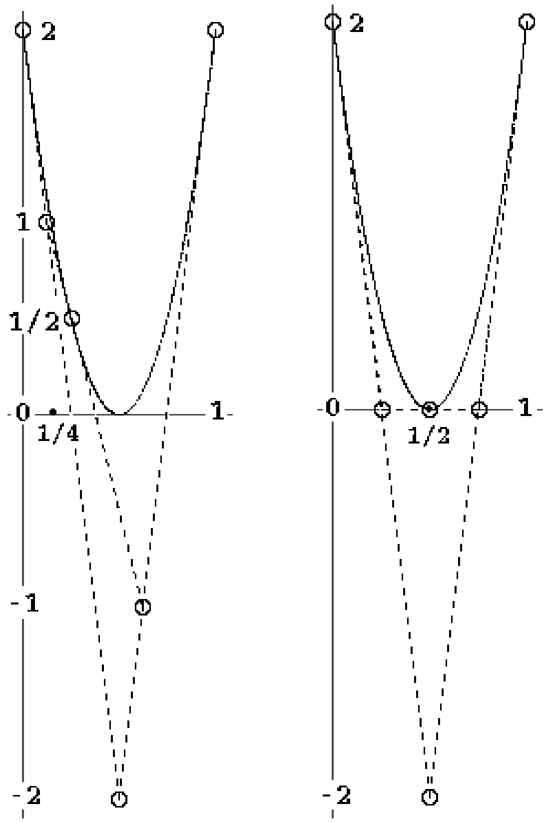

Figura 1.7: Esempio di $p(1/4)$ (sinistra); esempio di $p(1/2)$ (destra)

allora

$$p(\frac{1}{2}) := c_0^{[2]} = 0.$$

In alternativa, se il costo di $O(n^2)$ dell'algortimo di de Casteljau è inaccettabile, è possibile usare un metodo tipo Horner effettuando il seguente cambio di variabile:

$$t \in [0, \frac{1}{2}] \rightarrow u \in [0,1]; \quad u = \frac{t}{1-t};$$

$$t \in [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow u \in [0,1]; \quad v = \frac{1-t}{t}.$$

Si ottiene

$$p(t) = (1-t)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i u^i \quad \text{per} \quad \mathrm{t} \in [0, \frac{1}{2}]$$

e

$$p(t) = t^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i v^{n-i} \quad \text{per} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Infatti da $u = \frac{t}{1-t}$ si ottiene $t = \frac{u}{1+u}$ e $(1-t) = \frac{1}{1+u}$; sostituendo nelle $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ si ottiene

$$B_{i,n}(u) = \binom{n}{i}(\frac{1}{1+u})^{n-i}(\frac{u}{1+u})^i = \binom{n}{i}\frac{u^i}{(1+u)^n} = (1-t)^n \binom{n}{i} u^i.$$

Analogamente da $v = \frac{1-t}{t}$ si ottiene $t = \frac{1}{1+v}$ e $(1-t) = \frac{v}{1+v}$; sostituendo nelle $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i$ si ottiene

$$B_{i,n}(v) = \binom{n}{i}(\frac{v}{1+v})^{n-i}(\frac{1}{1+v})^i = \binom{n}{i}\frac{v^{n-i}}{(1+v)^n} = t^n \binom{n}{i} v^{n-i}.$$

Se questa formula deve essere usata frequentemente si raccomanda di memorizzare il prodotto dei coefficienti con i coefficienti binomiali, per evitare di ricalcolare i coefficienti binomiali e i prodotti ogni volta. Si notino le due formulazioni per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ per evitare problemi di cancellazione numerica.

Osservazione Un polinomio nella base di Bernstein in cui i coefficienti binomiali sono assorbiti nei coefficienti del polinomio si dice in forma di Bernstein scalata e i coefficienti

$$\tilde{c_i} = \binom{n}{i} c_i$$

sono detti coefficienti scalati. I semplici cambi di variabile visti sono usati per trasformare un polinomio nella base di Bernstein scalato in un polinomio nella base delle potenze.

1.9 Derivata di un polinomio nella base di Bernstein

Per $p(t) \quad t \in [0, 1]$, nella base di Bernstein sarà:

$$p'(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B'_{i,n}(t)$$

dove

$$B'_{i,n}(t) = n(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)).$$

Infatti, dalla definizione di polinomi di Bernstein si ha:

$$B'_{i,n}(t) = \binom{n}{i}\frac{d}{dt}(1-t)^{n-i}t^i =$$

$$\binom{n}{i}[i(1-t)^{n-i}t^{i-1} - (n-i)(1-t)^{n-i-1}t^i] =$$

ricordando che

$$\binom{n}{i}(n-i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i) = \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = n\binom{n}{i}$$

e

$$\binom{n}{i}i = \frac{n!}{i!(n-i)!}i = \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\binom{n-1}{i-1}$$

si ha

$$= n[\binom{n-1}{i-1}(1-t)^{n-i}t^{i-1} - \binom{n-1}{i}(1-t)^{n-i-1}t^i] =$$
$$= n[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)].$$

Allora sostituendo nella $p'(t)$ si ottiene:

$$p'(t) = n\sum_{i=0}^{n} c_i[B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)] =$$

$$= n\sum_{i=0}^{n} c_iB_{i-1,n-1}(t) - n\sum_{i=0}^{n} c_iB_{i,n-1}(t) =$$
$$= n\sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}B_{i,n-1}(t) - n\sum_{i=0}^{n-1} c_iB_{i,n-1}(t) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} d_iB_{i,n-1}(t)$$

con $d_i = n(c_{i+1} - c_i) \quad i = 0, \ldots, n-1$ che sono i coefficienti del polinomio derivata prima, di grado $n-1$, nella base di Bernstein.

Osservazione Le derivate agli estremi si ottengono facilmente come $p'(0) := d_0$ e $p'(1) := d_{n-1}$.

Osservazione La derivata di un polinomio di Bernstein di grado n e definito su $[a, b]$ è data da:

$$B'_{i,n}(x) = \frac{n}{b-a}[B_{i-1,n-1}(x) - B_{i,n-1}(x)].$$

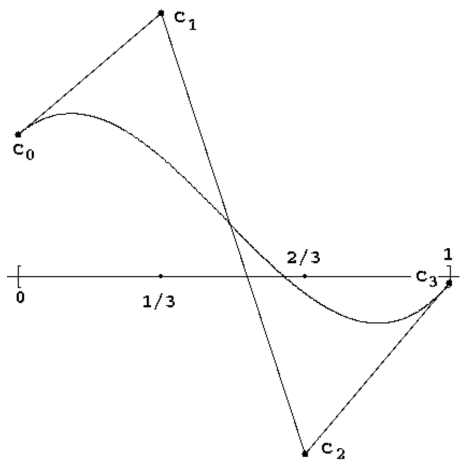

Figura 1.8: Derivata agli estremi, $n = 3$, $p'(0) = 3(c_1 - c_0) = \frac{(c_1 - c_0)}{1/3} = \frac{dy}{dx}$

1.10 Antiderivata e integrazione

Sia $p(t) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i B_{i,n-1}(t)$ un polinomio di grado $n-1$ definito in $[0, 1]$ nella base di Bernstein. Una sua antiderivata o primitiva sarà un polinomio di grado n che nella base di Bernstein può essere espressa come

$$p^{-1}(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i B_{i,n}(t)$$

con

$$c_{i+1} := \frac{d_i}{n} + c_i \quad i = 0, \dots, n-1$$

avendo fissato un valore per c_0 (per esempio $c_0 := 0$).
La scelta arbitraria del valore iniziale c_0 è data dal fatto che esistono più primitive tutte differenti a meno di una costante additiva.

Volendo procedere a determinare l'integrale definito di un polinomio $p(t)$ si avrà:

$$\int_0^1 p(t)dt = [p^{-1}(t)]_0^1 = c_n - c_0 = c_n$$

se, come suggerito prima, si sceglie $c_0 = 0$. In particolare sarà poi:

$$c_n = \frac{d_{n-1}}{n} + c_{n-1} =$$

$$= \frac{d_{n-1}}{n} + \frac{d_{n-2}}{n} + c_{n-2} =$$

$$\cdots$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} d_i.$$

Osservazione L'integrale definito di ogni polinomio di Bernstein di grado n in $[0,1]$ è la costante $\frac{1}{n+1}$.
Infatti $B_{i,n}(t)$ è un polinomio nella base di Bernstein di coefficienti

$$d_j = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

così che

$$\int_0^1 B_{i,n}(t)dt = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} d_j = \frac{1}{n+1}.$$

Osservazione L'integrale definito di ogni polinomio base di Bernstein di grado n in $[a,b]$ è la costante $\frac{b-a}{n+1}$.
Questo è banalmente vero pensando di calcolare

$$\int_a^b B_{i,n}(x)dx$$

effettuando un cambio di variabile da $[a,b]$ a $[0,1]$; infatti sarà:

$$\int_a^b B_{i,n}(x)dx = (b-a)\int_0^1 B_{i,n}(t)dt = \frac{b-a}{n+1}$$

1.11 Conversione di base

Dato un polinomio nella base monomiale, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, lo si vuole rappresentare nella base di Bernstein $p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j B_{j,n}(x) \quad x \in [0,1]$. Si dimostra che ogni monomio x^j si esprime nella forma:

$$x^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{jk} \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$$

ovvero:

$$\Lambda_{(n+1)\times(n+1)} \begin{pmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

dove Λ si chiama matrice di *cambio di base*.
Viceversa:

$$\binom{n}{j}(1-x)^{n-j}x^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{jk}^{-1} x^k$$

avremo quindi:

$$\Lambda^{-1}_{(n+1)\times(n+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \vdots \\ B_{n,n}(x) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Dato x^j troviamo i λ_{jk} nel seguente modo:

$$x^j = x^j((1-x)+x)^{n-j} =$$

ricordando lo sviluppo binomiale:

$$= x^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1-x)^{n-j-k} x^k = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (1-x)^{n-(j+k)} x^{j+k} =$$

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} (1-x)^{n-k} x^k = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \binom{n}{j}^{-1} B_{k,n}(x)$$

ovvero x^j è combinazione lineare dei polinomi di Bernstein e la matrice Λ sarà:

$$\lambda_{jk} = \begin{cases} \binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1} & k \geq j \\ \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{1.3}$$

Osservazione Si noti la rappresentazione di x nella base di Bernstein mediante i $\lambda_{1,k}$, cioè:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} B_{k,n}(x)$$

avendo posto $\lambda_{1,0} = 0$.
La conversione opposta sarà:

$$\lambda_{jk}^{-1} = \begin{cases} (-1)^{k-j}\binom{n}{k}\binom{k}{j} & k \geq j \\ \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{1.4}$$

Esempio: n = 2

$$\Lambda_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}/\binom{2}{0} & \binom{1}{0}/\binom{2}{0} & \binom{2}{0}/\binom{2}{0} \\ 0 & \binom{1}{1}/\binom{2}{1} & \binom{2}{1}/\binom{2}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}/\binom{2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice che permette di passare dalla base monomiale a quella di Bernstein;
verifica:

$$\Lambda \begin{pmatrix} B_{0,2}(x) \\ B_{1,2}(x) \\ B_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

sapendo che

$$B_{0,2}(x) = \binom{2}{0}(1-x)^2x^0 = (1-x)^2$$

$$B_{1,2}(x) = \binom{2}{1}(1-x)x = 2(1-x)x$$

$$B_{2,2}(x) = \binom{2}{2}(1-x)^0x^2 = x^2$$

allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-x)^2 \\ 2(1-x)x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)^2 + 2(1-x)x + x^2 \\ (1-x)x + x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + x^2 - 2x + 2x - 2x^2 + x^2 \\ x - x^2 + x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

La

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permette di ottenere la conversione opposta.

Ora, noti gli a_k, coefficienti di $p(x)$ nella base monomiale, si vogliono ottenere i c_k, coefficienti di $p(x)$ nella base di Bernstein.

$$p(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} =$$

$$= (c_0, c_1, \ldots, c_n) \begin{pmatrix} B_{0,n}(x) \\ B_{1,n}(x) \\ \ldots \\ B_{n,n}(x) \end{pmatrix} =$$

valendo la (1.1) sarà:

$$p(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)\Lambda \begin{pmatrix} B_{0,n} \\ B_{1,n} \\ \ldots \\ B_{n,n} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n) := (a_0, a_1, \ldots, a_n)\Lambda$$

Da questa relazione, banalmente si ha la conversione opposta e cioè:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) := (c_0, c_1, \ldots, c_n)\Lambda^{-1}$$

Esempio: Sia dato il seguente polinomio di grado 3 in $[0, 1]$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$$

si vogliono trovare i c_j coefficienti della rappresentazione nella base di Bernstein;

$$c_0 = a_0 = 2$$

$$c_1 = a_0 + \binom{1}{1} / \binom{3}{1} a_1 =$$

$$= 2 + 1/3 \cdot 3 = 3$$

$$c_2 = \binom{2}{0} / \binom{3}{0} a_0 + \binom{2}{1} / \binom{3}{1} a_1 + \binom{2}{2} / \binom{3}{2} a_2 =$$

$$= 2 + 2/3 \cdot 3 - 1/3 = 11/3$$

$$c_3 = \binom{3}{0} / \binom{3}{0} a_0 + \binom{3}{1} / \binom{3}{1} a_1 + \binom{3}{2} / \binom{3}{2} a_3 =$$

$$= 2 + 3 - 1 + 4 = 8$$

quindi nella base di Bernstein:

$$p(x) = 2B_{0,3}(x) + 3B_{1,3}(x) + \frac{11}{3}B_{2,3}(x) + 8B_{3,3}(x).$$

Osservazione Nota la complessità per la valutazione di un polinomio nella base di Bernstein e nota la complessità del metodo di Horner per un polinomio nella base monomiale, per polinomi di grado basso di cui si devono effettuare molte valutazioni, può essere conveniente fare una conversione di base e procedere con il metodo di Horner (vedi [FARA87]). Questa operazione è però sconsigliata per polinomi di grado maggiore di 3 o 4 per il peggior condizionamento della base monomiale rispetto a quello di Bernstein e per la stabilità della formula ricorrente per la valutazione della base di Bernstein.

```
function lambda=mon_ber(n)
% Calcola la matrice Lambda di conversione da base delle
% potenze di grado n a base di Bernstein in [0,1];
n=n+1;
lambda=zeros(n,n);
lambda(1,:)=ones(1,n);
for i=2:n
   for j=i:n
      lambda(i,j)=lambda(i-1,j-1)+lambda(i,j-1);
   end
end
for i=2:n
   lambda(i,:)=lambda(i,:)./lambda(i,n);
end
```

1.12 Formulazione matriciale

Alcuni autori preferiscono scrivere un polinomio nella base di Bernstein in forma matriciale. Il polinomio $p(t)$ può essere visto come il seguente prodotto scalare:

$$p(t) = (c_0 c_1 \dots c_n) \begin{pmatrix} B_{0,n}(t) \\ B_{1,n}(t) \\ \dots \\ B_{n,n}(t) \end{pmatrix}.$$

Si può fare un ulteriore passo e applicare la conversione da base di Bernstein a base monomiale vista 1.2, e riscrivere:

$$p(t) = (c_0 c_1 \dots c_n)\Lambda^{-1}_{(n+1)\times(n+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \dots \\ t^n \end{pmatrix}.$$

Abbiamo già visto la $\Lambda^{-1}_{3\times 3}$, qui citiamo esplicitamente il caso cubico, cioè:

$$\Lambda^{-1}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una formulazione matriciale è utile quando si considera una implementazione hardware o meglio l'hardware è predisposto ad eseguire le moltiplicazioni matrice per vettore.

1.13 Conversione di base da Bernstein in $[a, b]$ a Bernstein in $[c, d]$

Per procedere alla soluzione di questo problema una idea potrebbe essere quella di effettuare prima il cambio di base da Bersntein in $[a, b]$ alla base monomiale, quindi da questa alla base di Bernstein in $[c, d]$.
Si indichino con $\bar{B}_{i,n}$ i polinomi base di Bernstein in $[a, b]$ e con $\tilde{B}_{i,n}$ quelli in $[c, d]$; allora da $\bar{B}_{i,n}$ a base monomiale sarà:

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{0,n}(x) \\ \bar{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \bar{B}_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

con Λ la matrice di trasformazione.
Da monomiale a $\tilde{B}_{i,n}$ sarà:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{0,n}(x) \\ \tilde{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

e quindi da $\bar{B}_{i,n}$ in $[a,b]$ a $\tilde{B}_{i,n}$ in $[c,d]$ sarà:

$$\Lambda\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{B}_{0,n}(x) \\ \tilde{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n,n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{0,n}(x) \\ \bar{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \bar{B}_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

La seguente sezione, che risulta un caso particolare di questa, è molto importante in quanto introduce il concetto di *suddivisione* di un polinomio in due polinomi ancora rappresentati nella base di Bernstein, mediante il concetto di cambio di base.

1.14 Conversione di base da Bernstein in $[0,1]$ a Bernstein in $[0,c]$ con $c < 1$

Seguendo l'idea prima esplorata, si passa per la base monomiale.
Come prima siano $\bar{B}_{i,n}$ i polinomi base di Bernstein in $[0,1]$ e $\tilde{B}_{i,n}$ quelli in $[0,c]$;
da $\bar{B}_{i,n}$ in $[0,1]$ a monomiale sappiamo tutto dalla sezione 1.10 in cui abbiamo trattato proprio questo caso e riassumendo è:

$$\Lambda^{-1}_{(n+1)\times(n+1)}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_{0,n}(x) \\ \bar{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \bar{B}_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

con

$$\lambda^{-1}_{jk} = \begin{cases} (-1)^{k-j}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} & k \geq j \\ \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Da monomiale a $\tilde{B}_{i,n}$ in $[0,c]$, possiamo seguire lo stesso procedimento visto nella sezione 1.10; in particolare proviamo ad esprimere le funzioni monomiali in tale base:

$$x^j = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{jk} \binom{n}{k} \frac{(c-x)^{n-k}x^k}{c^n} \quad x \in [0,c]$$

Dato x^j troviamo i γ_{jk} nel seguente modo:

$$x^j = x^j\left(\frac{(c-x)+x}{c}\right)^{n-j} =$$

ricordando lo sviluppo binomiale:

$$= x^j \sum_{k=0}^{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ k \end{array} \right) \frac{(c-x)^{n-j-k} x^k}{c^{n-j}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ k \end{array} \right) \frac{(c-x)^{n-(j+k)} x^{j+k}}{c^{n-j}}$$

$$= c^j \sum_{k=j}^{n} \left(\begin{array}{c} n-j \\ k-j \end{array} \right) \frac{(c-x)^{n-k} x^k}{c^n}$$

$$= c^j \sum_{k=j}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right)^{-1} \tilde{B}_{k,n}(x)$$

ovvero x^j è combinazione lineare dei polinomi di Bernstein e la matrice Γ sarà:

$$\gamma_{jk} = \begin{cases} c^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right)^{-1} & k \geq j \\ & \\ 0 \text{ altrimenti} & \end{cases}$$

e sarà:

$$\Gamma \left(\begin{array}{c} \tilde{B}_{0,n}(x) \\ \tilde{B}_{1,n}(x) \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n,n}(x) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^n \end{array} \right)$$

Esempio $n = 2$

$$\Gamma_{3\times 3} = \left(\begin{array}{ccc} c^0 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) & c^0 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) & c^0 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right) \\ 0 & c^1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) & c^1 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right) \\ 0 & 0 & c^2 \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) / \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c/2 & c \\ 0 & 0 & c^2 \end{array} \right)$$

Allora componendo avremo che la matrice di cambio di base da Bernstein in $[0,1]$ a Bernstein in $[0,c]$ con $c<1$, sarà data da:

$$\Lambda^{-1}\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & (1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 2c(1-c) \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Esempio Sia $p(t) = \sum_{i=0}^{2} a_i \bar{B}_{i,2}(t) \quad t \in [0,1]$ e si voglia determinare la rappresentazione di $p(t)$ nella base di Bernstein $\tilde{B}_{i,2}(t) \quad t \in [0,c]$, cioè $p(t) = \sum_{i=0}^{2} b_i \tilde{B}_{i,2}(t)$.
Sarà

$$(b_0, b_1, b_2) = (a_0, a_1, a_2)\Lambda^{-1}\Gamma =$$

$$(a_0, a_0(1-c) + a_1 c, a_0(1-c)^2 + a_1 2c(1-c) + a_2 c^2)$$

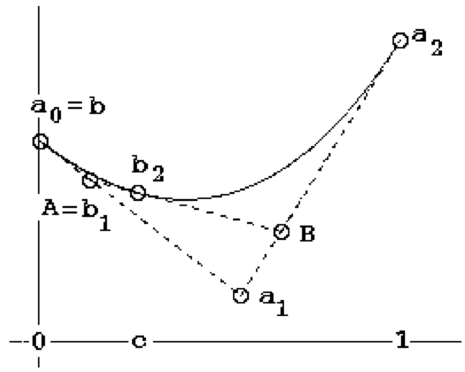

Figura 1.9: Suddivisione mediante cambio di base.

Si osservi che b_2 è calcolato geometricamente come combinazione convessa fra $A := a_0(1-c) + a_1 c$ e $B := a_1(1-c) + a_2 c$ secondo $(1-c)$ e c cioè

$$b_2 = A(1-c) + Bc$$

e che A e B sono combinazione convessa di a_0 e a_1 e a_1 e a_2 rispettivamente secondo $1-c$ e c; possiamo dire che la determinazione di b_2 coincide con quanto determina l'algoritmo di de Casteljau per valutare il polinomio $p(t)$ in c e che A e B sono i coefficienti determinati nel primo passo dell'algoritmo stesso.

1.15 Suddivisione di un polinomio nella base di Bernstein

Il problema di suddividere un polinomio $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{i,n}(t) \quad t \in [0,1]$ in due polinomi $p_1(t) \quad t \in [0,c]$ e $p_2(t) \quad t \in [c,1]$ ancora rappresentati nella base di Bernstein rispettivamente in $[0,c]$ e $[c,1]$ viene risolto mediante un cambio di base di $p(t)$ nella base di Bernstein in $[0,c]$ e un cambio di base di $p(t)$ nella base di Bernstein in $[c,1]$. Come già si è osservato nella sezione precedente questo equivale a valutare $p(t)$ nel punto c mediante l'algoritmo di de Casteljau e nel considerare i coefficienti intermedi nella valutazione come i coefficienti di $p_1(t)$ e di $p_2(t)$.

$$\begin{array}{llllll}
c_0^{[0]} & c_1^{[0]} & c_2^{[0]} & \dots & c_{n-1}^{[0]} & c_n^{[0]} \\
c_0^{[1]} & c_1^{[1]} & c_2^{[1]} & \dots & c_{n-1}^{[1]} & \\
\dots & & & \dots & & \\
c_0^{[n-2]} & c_1^{[n-2]} & c_2^{[n-2]} & & & \\
c_0^{[n-1]} & c_1^{[n-1]} & & & & \\
c_0^{[n]} & & & & &
\end{array}$$

Allora sarà:

$$p_1(t) = \sum_{i=0}^{n} c_0^{[i]} B_{i,n}(t) \quad t \in [0,c]$$

e

$$p_2(t) = \sum_{i=0}^{n} c_{n-i}^{[i]} B_{i,n}(t) \quad t \in [c,1].$$

1.16 Elevamento di grado

Un polinomio di grado esattamente n nella base delle potenze può essere banalmente pensato come un polinomio di grado $n+1$ con rappresentazione data da $p(t) + 0t^{n+1}$; la stessa cosa non è così semplice se il polinomio è nella base di Bernstein. Dovrà essere:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \sum_{i=0}^{n+1} d_i \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i$$

Moltiplichiamo l'espressione a sinistra per $(t + (1-t))$ e otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \binom{n}{i} ((1-t)^{n+1-i} t^i + (1-t)^{n-i} t^{i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} d_i \binom{n+1}{i} (1-t)^{n+1-i} t^i$$

Confrontiamo i coefficienti di $(1-t)^{n+1-i}t^i$ di entrambe le espressioni e otteniamo

$$d_i \binom{n+1}{i} = c_i \binom{n}{i} + c_{i-1} \binom{n}{i-1}$$

che è equivalente a

$$d_i = \frac{i}{n+1} c_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1}) c_i \quad i = 0, \ldots n+1.$$

Così i nuovi coefficienti vengono ottenuti dai vecchi mediante interpolazioni lineari valutate nel parametro $\frac{i}{n+1}$. Segue che il nuovo poligono di controllo giace nel guscio convesso del vecchio. La figura mostra un esempio.

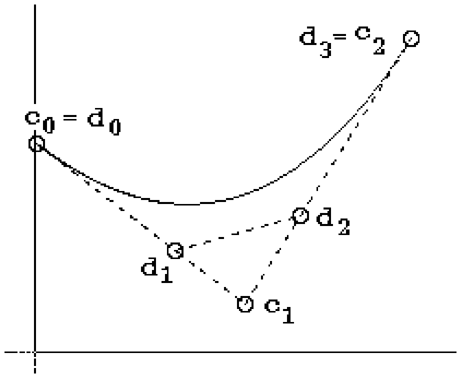

Figura 1.10: Elevamento di grado.

Si noti come il nuovo poligono sia più prossimo al grafico del polinomio. Il processo di elevamento di grado può essere ripetuto ottenendo una successione di poligoni di controllo per il polinomio $p(t)$. Se indichiamo con Γp il poligono del polinomio e $\Gamma^r p$ il poligono dopo aver effettuato r elevamenti di grado si ha che

$$\lim_{r \to \infty} \Gamma^r p = p$$

Il processo di ripetuti elevamenti di grado può essere descritto con il termine *cutting corner*. I vertici del vecchio poligono vengono tagliati per ottenerne due nuovi. Ci si può chiedere se un tale processo (un cutting corner all'infinito) converga sempre ad una ben definita curva, anche se il processo di "cutting" sia più generico di quello definito nell'elevamento di grado. La risposta è positiva: la convergenza è garantita. Altre regole di cutting corner portano ai polinomi a tratti o a curve ancora più generali non necessariamente esprimibile con una formula chiusa come le *curve di suddivisione.*

1.17 Riduzione di grado

L'elevamento di grado può essere visto come un processo che introduce ridondanza; un polinomio viene descritto mediante più informazioni di quelle necessarie. Il processo inverso potrebbe sembrare più interessante: si possono ridurre possibili ridondanze nella rappresentazione di un polinomio nella base di Bernstein? Più precisamente, si può scrivere un polinomio di grado n come uno di grado $n-1$? Questo processo viene detto riduzione di grado.

In generale, una riduzione di grado esatta non è possibile. Una riduzione di grado, perciò, può solo essere visto come un metodo per approssimare un dato polinomio con uno di grado più basso.

Il nostro problema attuale è il seguente: dato un polinomio nella base di Bernstein con coefficienti $d_i \quad i = 0, \dots, n$, possiamo trovare un polinomio nella base di Bernstein con coefficenti $c_i \quad i = 0, \dots, n-1$ che approssima il polinomio originale?

Per il momento supponiamo che i d_i siano ottenuti dai c_i mediante un processo di elevamento di grado. Allora essi dovrebbero essere legati da:

$$d_i = \frac{i}{n} c_{i-1} + \frac{n-i}{n} c_i.$$

Questa relazione può essere usata per derivare due formule ricorrenti per la generazione dei c_i dai d_i:

$$d_i = \frac{nc_i - id_{i-1}}{n-i} \quad i = 0, \dots n-1$$

e

$$d_{i-1} = \frac{nc_i - (n-i)d_i}{i} \quad i = n, \dots 1$$

Se il dato polinomio di grado n è effetivamente di grado $n-1$, la prima formula fornirà i coefficienti del polinomio di grado $n-1$.

Se questo non è vero otterremo solo un approssimazione, piuttosto cattiva nella maggioranza dei casi. Si può osservare che la prima formula produce coefficienti il cui polinomio risultante approssima bene il polinomio originale solo nella prima parte dell'intervallo, mentre la seconda porta ad un polinomio che approssima bene nella parte finale dell'intervallo. Si possono combinare i due per ottenere una buona approssimazione sull'intero intervallo. Il primo che si occupò di riduzione di grado fu Forrest, ma soprattutto ci sembra utile segnalare [WAWO88].

Osservazione Nel caso il polinomio di grado n sia esattamente riducibile, come possiamo accorgercene prima di applicare il metodo? Se effettuassimo una conversione da base di Bernstein a base delle potenze, sarebbe evidente dal fatto che il coefficiente della potenza massima sarebbe nullo. Senza effettuare nessun cambio di base è possibile verificare che questo sia nullo ricordando che il coefficiente della potenza massima è dato dalla somma con segno alterno dei coefficienti scalati del polinomio nella base di Bernstein (vedi cambio di base).

1.18 Interpolazione polinomiale

L'interpolazione polinomiale è sempre il primo argomento in un capitolo sull'approssimazione; il primo metodo di soluzione è probabilmente dovuto a Newton.
Oggi l'interpolazione polinomiale è soprattutto un argomento di valore storico più che utile in pratica; infatti sono stati sviluppati metodi più veloci ed accurati basati su polinomi a tratti.
Per questo motivo trattare l'interpolazione polinomiale nella base di Bernstein non è a mio parere molto significativo. Al contrario alcuni autori si sono sforzati di risolvere tale problema in maniera meno banale, ma non so quanto più efficientemente, che non risolvere un semplice sistema lineare. Il mio punto di vista è che se si è interessati a determinare un polinomio interpolante direttamente nella base di Bernstein, anche se non è il modo più economico, si può tranquillamente procedere risolvendo il sistema lineare associato. Del resto la matrice dei polinomi di Bernstein nei punti risulta meglio condizionata che non la matrice di Vandermonde come si può osservare nella seguente tabella in cui vengono mostrati gli indici di condizionamento delle matrici calcolate su punti equidistanti nell'intervallo di definizione mediante polinomi di Bernstein e base delle potenze.

Più interessante è l'interpolazione cubica di Hermite realizzata con un polinomio cubico nella base di Bernstein; questa consiste nel determinare il polinomio cubico $p(t)$ che interpola i seguenti dati:

$$p(0) = y_0, \quad p'(0) = y'_0, \quad p(1) = y_1, \quad p'(1) = y'_1.$$

grado n	Bernst.	Potenze
3	2.27	1.41E02
4	4.52	9.04E02
5	9.65	3.78E03
6	21.60	2.50E04
7	49.98	1.30E05
8	118.38	8.10E05
9	285.34	5.08E06
10	697.14	3.04E07

Tabella 1.1: Indici di condizionamento delle matrici ottenute valutando i polinomi di Bernstein e la base delle potenze in punti equidistanti.

Si dovranno determinare i quattro punti di controllo o coefficienti c_0, c_1, c_2 e c_3. Due di loro sono banalmente determinati:

$$c_0 := y_0, \quad c_3 := y_1.$$

Per i rimanenti, richiamiamo il valore della derivata di un polinomio nella base di Berstein negli estremi (vedi sezione 1.9):

$$p'(0) = 3(c_1 - c_0), \quad p'(1) = 3(c_3 - c_2).$$

Da queste si possono ricavare c_1 e c_2:

$$c_1 := y_0 + \frac{1}{3}y_0', \quad c_2 := y_1 - \frac{1}{3}y_1'.$$

Avendo risolto il problema di interpolazione, riscriviamolo in forma cardinale, cioè utilizzando i noti polinomi cubici di Hermite:

$$p(t) = y_0 H_{0,3}(t) + y_0' H_{1,3}(t) + y_1' H_{2,3}(t) + y_1 H_{3,3}(t)$$

$$= y_0 B_{0,3}(t) + (y_0 + \frac{1}{3}y_0')B_{1,3}(t) + (y_1 - \frac{1}{3}y_1')B_{2,3}(t) + y_1 B_{3,3}(t)$$

da cui

$$\begin{array}{rcl} H_{0,3}(t) & = & B_{0,3}(t) + B_{1,3}(t) \\ H_{1,3}(t) & = & \frac{1}{3}B_{1,3}(t) \\ H_{2,3}(t) & = & -\frac{1}{3}B_{2,3}(t) \\ H_{3,3}(t) & = & B_{2,3}(t) + B_{3,3}(t) \end{array}$$

Queste relazioni esprimono il cambio di base fra i polinomi cubici di Bernstein e i polinomi cubici di Hermite.

Ugualmente interessante è l'interpolante quintico di Hermite nella base di Bernstein. Anzichè dare solo la posizione e derivata prima negli estremi, si danno anche le derivate seconde. Allora i dati saranno:

$$p(0) = y_0, \quad p'(0) = y_0', \quad p''(0) = y_0'', \quad p(1) = y_1, \quad p'(1) = y_1' \quad p''(1) = y_1''.$$

I coefficienti del polinomio interpolante nella base di Bernstein sono facilmente determinabili come già fatto prima.

$$c_0 := y_0, \quad c_3 := y_1.$$

$$p'(0) = 5(c_1 - c_0), \quad p'(1) = 5(c_3 - c_2).$$

$$p''(0) = 20(c_2 - 2c_1 + c_0), \quad p''(1) = 20(c_5 - 2c_4 + c_3).$$

Da cui:

$$c_1 := y_0 + \frac{1}{5}y_0', \quad c_4 := y_1 - \frac{1}{5}y_1'.$$

$$c_2 := y_0 + \frac{2}{5}y_0' + \frac{1}{20}y_0'', \quad c_3 := y_1 - \frac{2}{5}y_1' + \frac{1}{20}y_1''.$$

Allora

$$p(t) = y_0 H_{0,5}(t) + Y_0' H_{1,5}(t) + y_0'' H_{2,5}(t) + y_1'' H_{3,5}(t) + y_1' H_{4,5}(t) + y_1 H_{5,5}(t)$$

$$= y_0 B_{0,5}(t) + (y_0 + \frac{1}{5}y_0')B_{1,5}(t) + (y_0 + \frac{2}{5}y_0' + \frac{1}{20}y_0'')B_{2,5}(t) +$$

$$+ (y_1 - \frac{2}{5}y_1' + \frac{1}{20}y_1'')B_{3,5}(t) + (y_1 - \frac{1}{5}y_1')B_{4,5}(t) + y_1 B_{5,5}(t)$$

da cui

$$\begin{array}{rcl} H_{0,5}(t) & = & B_{0,5}(t) + B_{1,5}(t) + B_{2,5}(t) \\ H_{1,5}(t) & = & \frac{1}{5}B_{1,5}(t) + \frac{2}{5}B_{2,5}(t) \\ H_{2,5}(t) & = & \frac{1}{20}B_{2,5}(t) \\ H_{3,5}(t) & = & \frac{1}{20}B_{3,5}(t) \\ H_{4,5}(t) & = & -\frac{2}{5}B_{3,5}(t) - \frac{1}{5}B_{4,5}(t) \\ H_{5,5}(t) & = & B_{3,5}(t) + B_{4,5}(t) + B_{5,5}(t) \end{array}$$

I metodi sopra visti sono alla base di metodi per una interpolazione o approssimazione interattiva di punti [FOR72]

1.19 Localizzazione e determinazione delle radici di un polinomio

Un polinomio nella base di Bernstein è in una forma ideale per localizzare ed approssimare le sue radici reali nel dato intervallo; questo sia per l'ottimo condizionamento della base di Bernstein rispetto a questo problema [FARA87], sia per gli eleganti e potenti algoritmi numerico/geometrici disponibili per polinomi in questa forma.
Per esempio la procedura di suddivisione permette l'indagine su intervalli successivamente sempre più piccoli, mentre la proprietà di variation diminishing e la proprietà del guscio convesso dei coefficienti indicano la presenza o meno di radici reali in questi sottointervalli.
In letteratura sono state proposte molteplici strategie per la localizzazione e approssimazione basata sulle caratteristiche della forma di Bernstein come ad esempio [LARI81], [NIS90)] e [SENI90].

E' interessante anche citare che il criterio per garantire la convergenza del metodo di Newton su un intervallo (vedi Teorema 4.8 in [HEN64]) ha una semplice e particolare espressione in termini di coefficienti del polinomio nella base di Bernstein.

Esistono semplici procedure di deflazione per eliminare ogni radice una volta che la si è determinata con sufficiente accuratezza.

Tutte le tecniche citate richiedono in generale delle modifiche per essere utilizzate per la determinazione di radici multiple in modo robusto.

Bibliografia

[FAR93] G. Farin. *Curves and Surfaces for CAGD: A practical guide* (third edition), Academic Press (1993).

[FARA87] R.T.Farouki, V.T.Rajan. *On the numerical condition of polynomials in Bernstein form*, Computer Aided Geometric Design, (4), 191-216 (1987).

[FARA88] R.T.Farouki, V.T.Rajan. *Algorithms for polynomials in Bernstein form*, Computer Aided Geometric Design, (5), 191-216 (1988).

[FOR72] A.Forrest *Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials*, Computer Aided Design, 22 (9), 527-537, (1990).

[HEN64] P.Henrici. *Elements of Numerical Analysis*, Wiley, (1964).

[LARI81] J.M.Lane, R.F.Riesenfeld. *Bounds on a polynomial*, BIT 21, 112-117 (1981).

[NIS90)] T.Nishita, T.W.Sederberg, M. Kakimoto, *Ray Tracing trimmed rationalsurface patches*, Computer Graphics, 24, 4, 337-345 (1990).

[SENI90] T.W.Sederberg, T.Nishita, *Curve intersection using Bézier Clipping*, Computer-Aided Design, 22, 9, 538-546 (1990).

[WAWO88] M.A.Watkins, A.J.Worsey, *Degree reduction of Bézier curves*, Computer-Aided Design, 20, 7, 398-405 (1988).