

Sulle Dynamic NURBS e la simulazione di processi dinamici

Giulio Casciola *, Gian Luca Rubini
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bologna

Sommario

In questa nota si vuole analizzare la proposta Dynamic NURBS per la simulazione realistica di processi dinamici. Viene considerata la proposta originale [1] nella sua generalità e se ne mostra la sua inadeguatezza. Si formula la proposta semplificata di DNURBS a pesi costanti come la più adeguata ai nostri fini, ma si mostrano alcuni limiti dovuti al collegamento fra il modello geometrico e quello fisico.

1 Introduzione

Nel 1994 Terzopoulos e Qin [1], hanno proposto le Dynamic NURBS (in breve DNURBS) al fine di una modellazione sculturata dinamica. Le DNURBS consistono in un modello fisico che incorpora la distribuzione di massa, le energie di deformazione interna ed altre quantità fisiche nel substrato geometrico delle ben note NURBS. Il tempo risulta fondamentale nella formulazione dinamica. Il modello è governato da equazioni differenziali che integrate numericamente nel tempo, permettono di far evolvere con continuità i punti di controllo e i pesi come conseguenza dell'applicazione di forze. Usando le DNURBS un progettista può sculturare forme complesse non solo cinematicamente mediante riposizionamento dei punti di controllo e dei pesi,

*Questa ricerca è stata parzialmente finanziata dal CNR, Progetto Finalizzato "Beni Culturali" (Unità Operativa IAC).

ma dinamicamente mediante l'applicazione di forze. Un controllo aggiuntivo sulla modellazione dinamica deriva da alcuni parametri fisici come la massa, lo smorzamento e proprietà elastiche.

Le DNURBS sono state motivate da precedenti ricerche indirizzate ad applicare modelli di deformazione alla progettazione di forme. Per un'ampia rassegna su questi lavori ci si può riferire proprio al lavoro sulle DNURBS [1].

Sicuramente le DNURBS risultano un modello molto più sofisticato dei precedenti in quanto ci si propone di convertire un modello geometrico in un modello dinamico mediante la meccanica lagrangiana. I punti di controllo e i pesi diventano coordinate generalizzate nelle equazioni lagrangiane del moto. La rigosità fisica e sistematicità nell'approccio lasciano intravedere la possibilità di considerare le DNURBS non solo a fini di modellazione sculturata, ma per la simulazione realistica di un processo dinamico.

Questa nota vuole riassumere i risultati di uno studio sulle DNURBS effettuato al fine di valutare la loro applicabilità nella simulazione realistica.

Nelle sezioni 2, 3 e 4 verranno richiamati i punti essenziali sulle curve e superfici NURBS, DNURBS e sul modello fisico. La sezione 5 è un primo risultato del nostro studio, sia teorico che sperimentale, sulla proposta originale, da cui emergono numerosi limiti e particolarità, e l'individuazione del caso di pesi costanti nel tempo come l'unico caso in cui le DNURBS potrebbero essere impiegate per la simulazione realistica. Le sezioni 6 e 7 sono la formulazione del modello semplificato delle DNURBS a pesi costanti. La 8 è la descrizione dell'implementazione effettuata, mentre la 9 tratta alcuni limiti di questa proposta pur lasciando ad una sperimentazione futura la verifica su esempi reali della possibilità di applicare le DNURBS in pratica, anche se in casi geometricamente semplici.

2 Curve e Superfici NURBS

In questa sezione richiameremo brevemente la formulazione delle curve e superfici NURBS e le loro proprietà analitiche e geometriche. Una loro trattazione dettagliata e sistematica si può trovare sul libro di Piegl e Tiller [5].

2.1 Curve

Una curva piana NURBS in forma parametrica è una combinazione lineare di funzioni razionali a tratti

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i R_{i,m}(u) \quad (1)$$

dove i $\mathbf{p}_i \in \mathbf{R}^2$ sono i punti di controllo, u è la variabile parametrica e

$$R_{i,m}(u) = \frac{w_i N_{i,m}(u)}{\sum_{j=1}^{m+k} w_j N_{j,m}(u)} \quad (2)$$

sono le $m + k$ funzioni razionali di base. Queste sono definite a partire dagli scalari non negativi w_i detti pesi e dalle B-Spline normalizzate $N_{i,m}$ di ordine m e definite sui nodi $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{2m+k}$. Il dominio parametrico è $[u_m, u_{m+k+1}]$.

2.2 Superfici

Una superficie NURBS in forma parametrica è una combinazione lineare di funzioni razionali bivariate a tratti

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{n+h} \mathbf{p}_{i,j} R_{i,m;j,n}(u, v) \quad (3)$$

dove i $\mathbf{p}_{i,j} \in \mathbf{R}^3$ sono i punti di controllo, u e v sono le variabili parametriche e

$$R_{i,m;j,n}(u, v) = \frac{w_{i,j} N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)}{\sum_{l=1}^{m+k} \sum_{r=1}^{n+h} w_{l,r} N_{l,m}(u) N_{r,n}(v)} \quad (4)$$

sono le $(m + k)(n + h)$ funzioni razionali di base. Queste sono definite a partire dagli scalari non negativi $w_{i,j}$ detti pesi e dalle B-Spline normalizzate prodotto tensoriale $N_{i,m;j,n}(u, v) = N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)$ di ordine (m, n) e definite sulla griglia di nodi $u_1 \leq \dots \leq u_{2m+k}$, $v_1 \leq \dots \leq v_{2n+h}$. Il dominio parametrico è $[u_m, u_{m+k+1}] \times [v_n, v_{n+h+1}]$.

2.3 Proprietà

Le curve e superfici NURBS generalizzano le spline polinomiali; come le B-spline, le funzioni base razionali sono a supporto locale, non negative e hanno somma uno. A differenza delle spline non hanno esattamente continuità C^{m-r-1} se tutti i nodi hanno al più molteplicità r , infatti, a causa della loro natura proiettiva, possono essere più regolari (si pensi per esempio al cerchio NURBS a 9 punti).

Come le spline polinomiali, godono delle proprietà del guscio convesso, di variation diminishing e invarianza per trasformazioni geometriche. In più delle spline polinomiali, posso rappresentare analiticamente coniche e quadriche oltre che forme libere e hanno i pesi come ulteriori parametri di forma.

3 Curve e Superfici DNURBS

3.1 Curve

Una curva piana DNURBS è definita come in (1), ma è, oltre che una funzione del parametro spaziale u , anche una funzione del tempo t :

$$\mathbf{c}(u, t) = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i(t) R_{i,m}(u, t)$$

con

$$R_{i,m}(u, t) = \frac{w_i(t) N_{i,m}(u)}{\sum_{j=1}^{m+k} w_j(t) N_{j,m}(u)}$$

I punti di controllo $\mathbf{p}_i(t)$ e i pesi $w_i(t)$, che sono funzioni del tempo, sono le coordinate generalizzate delle DNURBS.

In Terzopoulos e Qin [1] si fa vedere che la curva $\mathbf{c}(u, t)$ può essere espressa come $\mathbf{c}(u, \mathbf{p})$ per enfatizzare la sua dipendenza dal vettore di coordinate generalizzate $\mathbf{p}(t)$, definito come:

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_1^T, w_1, \mathbf{p}_2^T, w_2, \dots, \mathbf{p}_{m+k}^T, w_{m+k})$$

le cui componenti sono funzioni del tempo. Ancora

$$\mathbf{c}(u, \mathbf{p}) = J\mathbf{p} \tag{5}$$

con J matrice $2 \times 3(m+k)$, Jacobiana rispetto a \mathbf{p} della curva $\mathbf{c}(u, \mathbf{p})$, data da

$$J = \begin{pmatrix} R_1(u, t) & 0 & \Psi_1(t) & \dots & R_{m+k}(u, t) & 0 & \Psi_{m+k}(t) \\ 0 & R_1(u, t) & \Psi_1(t) & \dots & 0 & R_{m+k}(u, t) & \Psi_{m+k}(t) \end{pmatrix}$$

dove nelle $R_i(u, t)$ è stato omesso, per brevità, il secondo indice m e con

$$\Psi_i(t) = \frac{\sum_{j=1}^{m+k} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) w_j(t) N_{i,m}(u) N_{j,m}(u)}{(\sum_{l=1}^{m+k} w_l(t) N_{l,m}(u))^2}$$

Ancora

$$\dot{\mathbf{c}}(u, \mathbf{p}) = J \dot{\mathbf{p}} \quad (6)$$

Si vedano le dimostrazioni in [1].

3.2 Superfici

Una superficie DNURBS è definita come in (3), ma è, oltre che una funzione dei parametri spaziali u e v , anche una funzione del tempo t :

$$\mathbf{s}(u, v, t) = \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{n+h} \mathbf{p}_{i,j}(t) R_{i,m;j,n}(u, v, t)$$

con

$$R_{i,m;j,n}(u, v, t) = \frac{w_{i,j}(t) N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)}{\sum_{l=1}^{m+k} \sum_{r=1}^{n+h} w_{l,r}(t) N_{l,m}(u) N_{r,n}(v)}$$

I punti di controllo $\mathbf{p}_{i,j}(t)$ e i pesi $w_{i,j}(t)$ sono le coordinate generalizzate e possono essere assemblate nel vettore \mathbf{p} nel seguente modo:

$$\mathbf{p}(t) = [\mathbf{p}_{1,1}^T, w_{1,1}, \dots, \mathbf{p}_{1,n+h}^T, w_{1,n+h}, \mathbf{p}_{2,1}^T, w_{2,1}, \dots, \mathbf{p}_{m+k,n+h}^T, w_{m+k,n+h}]$$

Come prima si può scrivere $\mathbf{s}(u, v, \mathbf{p})$ anziché $\mathbf{s}(u, v, t)$ e per analogia si ottiene:

$$\mathbf{s}(u, v, \mathbf{p}) = J \mathbf{p} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{s}}(u, v, \mathbf{p}) = J \dot{\mathbf{p}} \quad (8)$$

con J matrice $3 \times 4(m+k)(n+h)$, Jacobiana rispetto a \mathbf{p} della superficie $\mathbf{s}(u, v, \mathbf{p})$, e data da

$$J = \begin{pmatrix} R_{1,1} & 0 & 0 & \Psi_{1,1} & \dots & R_{m+k,n+h} & 0 & 0 & \Psi_{m+k,n+h} \\ 0 & R_{1,1} & 0 & \Psi_{1,1} & \dots & 0 & R_{m+k,n+h} & 0 & \Psi_{m+k,n+h} \\ 0 & 0 & R_{1,1} & \Psi_{1,1} & \dots & 0 & 0 & R_{m+k,n+h} & \Psi_{m+k,n+h} \end{pmatrix}$$

dove nelle $R_{i,j}$ si sono omessi gli indici m, n per brevità, con

$$\Psi_{i,j} = \frac{\sum_{l=1}^{m+k} \sum_{r=1}^{n+h} (\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{l,r}) w_{l,r} N_{l,m}(u) N_{r,n}(v) N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)}{(\sum_{l=1}^{m+k} \sum_{r=1}^{n+h} w_{l,r} N_{l,m}(u) N_{r,n}(v))^2}$$

4 Equazioni del moto delle DNURBS

La fisica delle DNURBS è basata sulla versione lavoro-energia della dinamica lagrangiana [3]. In un sistema fisico astratto, siano $p_i(t)$ un insieme di coordinate generalizzate.

Nella formulazione lagrangiana definiamo un'energia cinetica T , un'energia potenziale U e l'energia di dissipazione di Raleigh F che sono funzioni delle coordinate generalizzate e delle loro derivate. Le equazioni lagrangiane del moto risultano espresse come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial T}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} + \frac{\partial U}{\partial p_i} = f_i \quad (9)$$

dove le $f_i(t)$ sono le forze esterne generalizzate che agiscono sui p_i .

Utilizzando la (9) si può considerare un arbitrario modello geometrico, come le NURBS, introdurre un'opportuna energia cinetica, potenziale, dissipativa e formulare sistematicamente una dinamica basata sulla generalizzazione del modello fisico. Per definire le energie e derivare le equazioni DNURBS del moto, sia $\mu(u)$ la funzione densità di massa definita nel dominio parametrico di una curva. L'energia cinetica diventa

$$T = \frac{1}{2} \int_u \mu(u) \dot{\mathbf{c}}^T \dot{\mathbf{c}} du = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T M \dot{\mathbf{p}} \quad (10)$$

dove per la (6)

$$M(\mathbf{p}) = \int_u \mu(u) J^T J du$$

è la matrice d'inerzia o delle masse generalizzate, avente dimensione $2(m+k) \times 2(m+k)$.

Similmente sia $\gamma(u)$ la funzione densità di dissipazione. L'energia dissipativa è

$$F = \frac{1}{2} \int_u \gamma(u) \dot{\mathbf{c}}^T \dot{\mathbf{c}} du = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T D \dot{\mathbf{p}}$$

dove

$$D(\mathbf{p}) = \int_u \gamma(u) J^T J du$$

è la matrice di dissipazione.

Per l'energia potenziale di deformazione delle DNURBS si adotta il modello noto in letteratura come "thin plate under tension" [1],[8],[9]:

$$U = \frac{1}{2} \int_u (\alpha(u) \frac{\partial \mathbf{c}^T}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial u} + \beta(u) \frac{\partial^2 \mathbf{c}^T}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial u^2}) du = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T K \mathbf{p}$$

Le $\alpha(u)$ e $\beta(u)$ sono funzioni di elasticità che controllano rispettivamente la tensione e la rigidità locali. Dalla (5) la matrice di rigidità, di dimensione $2(m+k) \times 2(m+k)$ è

$$K(\mathbf{p}) = \int_u (\alpha(u) J_u^T J_u + \beta(u) J_{uu}^T J_{uu}) du \quad (11)$$

dove l'indice di J denota la derivata parametrica.

In [1] si mostra che applicando la (9) le equazioni del moto delle DNURBS sono date da

$$M \ddot{\mathbf{p}} + D \dot{\mathbf{p}} + K \mathbf{p} = \mathbf{f}_p - I \dot{\mathbf{p}} \quad (12)$$

dove il vettore delle forze generalizzate, ottenuto mediante il principio dei lavori virtuali effettuato dall'applicazione della forza $\mathbf{f}(u, t)$, è

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{p}) = \int_u J^T \mathbf{f}(u, t) du$$

e dove

$$I(\mathbf{p}) = \int_u \mu(u) J^T J du$$

Analogamente per superfici si definisce

$$T = \frac{1}{2} \int_u \int_v \mu(u, v) \dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} du dv = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T M \dot{\mathbf{p}}$$

dove

$$M(\mathbf{p}) = \int_u \int_v \mu(u, v) J^T J du dv$$

è la matrice d'inerzia di dimensione $3(m+k)(n+h) \times 3(m+k)(n+h)$. Ancora

$$F = \frac{1}{2} \int_u \int_v \gamma(u, v) \dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} du dv = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T D \dot{\mathbf{p}}$$

dove

$$D(\mathbf{p}) = \int_u \int_v \gamma(u, v) J^T J du dv$$

è la matrice di dissipazione.

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int_u \int_v & (\alpha_{1,1}(u, v) \frac{\partial \mathbf{s}^T}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} + \alpha_{2,2}(u, v) \frac{\partial \mathbf{s}^T}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} + \beta_{1,1}(u, v) \frac{\partial^2 \mathbf{s}^T}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u^2} \\ & + \beta_{1,2}(u, v) \frac{\partial^2 \mathbf{s}^T}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial u \partial v} + \beta_{2,2}(u, v) \frac{\partial^2 \mathbf{s}^T}{\partial v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial v^2}) du dv = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T K \mathbf{p} \end{aligned}$$

dove $\alpha_{i,j}(u, v)$ e $\beta_{i,j}(u, v)$ sono le funzioni di elasticità che controllano rispettivamente la tensione e la rigidità locali nelle due direzioni parametriche. La matrice di rigidità è

$$\begin{aligned} K(\mathbf{p}) = \int_u \int_v & (\alpha_{1,1}(u, v) J_u^T J_u + \alpha_{2,2}(u, v) J_v^T J_v + \beta_{1,1}(u, v) J_{uu}^T J_{uu} + \\ & \beta_{1,2}(u, v) J_{uv}^T J_{uv} + \beta_{2,2}(u, v) J_{vv}^T J_{vv}) du dv \end{aligned}$$

Infine

$$\mathbf{f}_p(\mathbf{p}) = \int_u \int_v J^T \mathbf{f}(u, v, t) du dv$$

e

$$I(\mathbf{p}) = \int_u \int_v \mu(u, v) J^T \dot{J} du dv$$

5 Considerazioni sul modello proposto

In questa sezione si vogliono discutere alcuni problemi incontrati nello studio del modello proposto in [1], che sono per noi difficili da interpretare e giustificare, anche se utilizzato solo a fini di modellazione dinamica. Ricordando l'obiettivo di questa nota, e cioè l'analisi e studio dell'attendibilità di tale modello per la simulazione realistica di processi dinamici, ci sentiamo di sostenere la sua inadeguatezza.

5.1 Pesì come parametri lagrangiani

I pesì nella definizione delle curve e superfici DNURBS sono parametri lagrangiani liberi di variare nel tempo e quindi di assumere qualunque valore reale anche negativo. Ma nel modello geometrico delle NURBS non sono ammessi pesì negativi, così come possono risultare inaccettabili valori troppo grandi o troppo piccoli. In [1] questo problema è stato evidenziato e aggirato, ma non risolto, mediante l'imposizione di vincoli implementata stabilendo un limite inferiore positivo sui pesì e forzandoli mediante un metodo di proiezione nella soluzione numerica.

Una prima considerazione è legata al significato geometrico dei pesì nelle NURBS; è noto che sono parametri di forma, che non sono indipendenti e che non è noto che effetto abbiano sulla curva se modificati in numero maggiore di due alla volta.

Una seconda considerazione deriva dall'interpretazione fisica; pesì variabili significa funzioni di forma dipendenti dal tempo e quindi matrice M delle masse generalizzate, associata all'energia cinetica, funzione del tempo; ma allora dal punto di vista fisico si ha a che fare con oggetti di massa variabile. Un esempio potrebbe essere un razzo che lanciato in orbita varia la sua massa consumando il propellente.

5.2 Matrici M e D singolari

Poichè l'energia cinetica è nulla soltanto quando il sistema è in quiete e quindi quando $\dot{\mathbf{p}}$ è nullo, possiamo affermare che la forma quadratica (10) dovrebbe risultare definita positiva e il determinante della relativa matrice M , diverso da zero. Analogamente si può affermare per la matrice D associata all'energia di dissipazione.

In [1] gli autori affermano che M e D sono simmetriche e a banda, ma non dicono nulla sulla definitezza positiva; di seguito mostreremo che tali matrici non sono definite positive, ma sono solo semidefinite ed essendo reali e simmetriche sono singolari.

Vogliamo provare che preso un vettore $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ non nullo si ha $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$ ed in particolare individueremo un vettore \mathbf{x} per cui $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$.

Sia \mathbf{x} il vettore a $3(m+k)$ componenti, siffatto:

$$\mathbf{x} = (0, 0, w_1, 0, 0, w_2, \dots, 0, 0, w_{m+k})$$

con $w_i > 0$, allora sarà:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T M \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \int_u \mu(u) J^T J du \mathbf{x} \\ &= \int_u \mu(u) \mathbf{x}^T J^T J \mathbf{x} du \\ &= \int_u \mu(u) (J \mathbf{x})^T (J \mathbf{x}) du \end{aligned}$$

dalla (6) si ha che $J \mathbf{x}$ rappresenta una curva e che $(J \mathbf{x})^T (J \mathbf{x}) = \| J \mathbf{x} \|^2$, rappresenta la funzione distanza di ogni punto della curva dall'origine. Ma per come è stato scelto \mathbf{x} la curva in questione è degenera nell'origine, da cui la sua distanza è zero e quindi $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 0$.

Quanto dimostrato formalmente può essere semplicemente intuito dal fatto che la posizione di una curva è invariante per scalatura dei pesi e quindi si avrebbe un'energia cinetica non nulla anche in assenza di moto della curva. Lo stesso ragionamento vale per la matrice D

Probabilmente il motivo della singolarità delle matrici M e D risiede nel fatto che le coordinate lagrangiane w_i (i pesi delle NURBS) non sono indipendenti. Infatti dato un sistema materiale, in ogni istante le sue possibili configurazioni devono essere univocamente individuate mediante un numero finito di parametri indipendenti chiamati coordinate lagrangiane. Il numero di questi parametri viene detto grado di libertà del sistema. E' noto che i pesi delle NURBS non sono indipendenti, ma sono definiti a meno di un fattore di scala e quindi la curva ha grado di libertà $3(m+k)-1$. Il problema può essere risolto vincolando un peso a rimanere costante; così facendo la matrice M risulta ridotta di dimensione, ma soprattutto risulta definita positiva e quindi non singolare.

5.3 La matrice K

La stiffness matrix K o matrice di rigidità regola la rigidità del materiale intesa come rapporto fra forza e spostamento. Pur non essendo esperti di teoria delle strutture e dei materiali ci siamo resi conto che tale matrice è fondamentale per la deformazione dell'oggetto e che dalla letteratura a cui ci siamo riferiti non risulta chiaro quali proprietà debba avere. Infatti alcuni autori sostengono che la matrice K deve essere simmetrica e definita positiva (e quindi non singolare)[9], altri che K può essere singolare [3] ed altri che K deve essere singolare [10]. Come dovrebbe essere K sarà un ben preciso obiettivo di studio, qui possiamo dire che la matrice K data in (11) e proposta in [1] è singolare.

Si consideri il seguente vettore ad elementi non tutti nulli

$$\mathbf{p} = (0, 0, w_0, \dots, 0, 0, w_{m+k})$$

e verifichiamo che vale $K\mathbf{p} = \mathbf{0}$, da cui K deve essere singolare.

$$\begin{aligned} K\mathbf{p} &= \int_u \left(\alpha(u) J_u^T J_u \mathbf{p} + \beta(u) J_{uu}^T J_{uu} \mathbf{p} \right) du \\ &= \int_u \left(\alpha(u) J_u^T \frac{d}{du} \mathbf{c}(u) + \beta(u) J_{uu}^T \frac{d^2}{du^2} \mathbf{c}(u) \right) du = \mathbf{0} \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{c}(u) = \mathbf{0}$ per la scelta di \mathbf{p} .

5.4 Costo computazionale e soluzione numerica

Anche nella situazione di aver chiarito e risolto i punti precedenti, nella risoluzione numerica del sistema di equazioni differenziali (12), ad ogni passo bisogna ricalcolare le matrici M , D e K che risultano variabili nel tempo. Si ricorda che tali matrici hanno dimensione, nel caso di curve $3(m+k) \times 3(m+k)$ e nel caso di superfici $4(m+k)(n+h) \times 4(m+k)(n+h)$ e che ogni elemento comporta una integrazione numerica. Anche se, come propongono gli autori in [1], si pensa di risolvere il sistema in parallelo, l'elevato costo della valutazione di queste matrici suggerisce di applicare una estrapolazione costante, ossia di mantenere le matrici M , D e K costanti nel tempo evitando così di ricalcolarle ad ogni istante temporale. Sperimentalmente si è poi trovato che le matrici M e D , ridotte come indicato nella sezione precedente, hanno un alto indice di condizionamento e questo cresce all'aumentare dell'ordine m .

A fronte di quanto osservato nello studio del modello proposto, soprattutto con l'obiettivo di valutare l'attendibilità ai fini di una simulazione dinamica realistica, siamo arrivati alla determinazione di continuare il nostro studio e analisi limitatamente al caso di pesi costanti nel tempo. Nelle prossime sezioni formuleremo il modello semplificato che ne deriva e come vengono automaticamente superate le osservazioni fatte al caso generale, accenneremo all'implementazione effettuata, quindi indicheremo alcuni esperimenti che hanno messo in evidenza alcuni punti deboli nel legame fra il modello geometrico e quello fisico.

6 DNURBS a pesi costanti nel tempo

In questa sezione vengono formulate le curve e superfici DNURBS come combinazioni lineari di funzioni di forma variabili solo nei parametri u e v , ma costanti nel tempo. Questa semplificazione permette di interpretare l'equazione del moto delle DNURBS secondo il sistema delle "distributed coordinates" proposto in [3]. Anzichè considerare il caso generale in cui si vincolano tutti i pesi ad essere costanti nel tempo, si riformulano le curve e superfici DNURBS per ottenere già in fase di impostazione del modello delle semplificazioni.

Si definisce curva DNURBS la

$$\mathbf{c}(u, t) = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i(t) R_{i,m}(u)$$

con $R_{i,m}(u)$ date in (2). Ora sarà

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \dots, \mathbf{p}_{m+k}^T)$$

e

$$\mathbf{c}(u, \mathbf{p}) = J\mathbf{p}$$

con J matrice $2 \times 2(m+k)$ definita da

$$J = \begin{pmatrix} R_1(u, t) & 0 & \dots & R_{m+k}(u, t) & 0 \\ 0 & R_1(u, t) & \dots & 0 & R_{m+k}(u, t) \end{pmatrix}.$$

Ancora

$$\dot{\mathbf{c}}(u, \mathbf{p}) = J\dot{\mathbf{p}}.$$

Considerando le equazioni lagrangiane del moto (9), in cui compaiono l'energia cinetica, dissipativa e potenziale si ha che le matrici associate M , D e K sono definite come prima, ma sono ora costanti nel tempo; analogamente per il vettore \mathbf{f}_p delle forze esterne.

Analogamente si definisce superficie DNURBS la

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=1}^{m+k} \sum_{j=1}^{n+h} \mathbf{p}_{i,j} R_{i,m;j,n}(u, v)$$

con $R_{i,m;j,n}(u, v)$ date in (4). Ora sarà

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_{1,1}^T, \mathbf{p}_{1,2}^T, \dots, \mathbf{p}_{1,n+h}^T, \dots, \mathbf{p}_{m+k,n+h}^T)$$

e

$$\mathbf{s}(u, v, \mathbf{p}) = J\mathbf{p}$$

con J matrice $3 \times 3(m+k)(n+h)$ definita da

$$J = \begin{pmatrix} R_{1,1} & 0 & 0 & R_{1,2} & 0 & 0 & \dots & R_{m+k,n+h} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,1} & 0 & 0 & R_{1,2} & 0 & \dots & 0 & R_{m+k,n+h} & 0 \\ 0 & 0 & R_{1,1} & 0 & 0 & R_{1,2} & \dots & 0 & 0 & R_{m+k,n+h} \end{pmatrix}$$

Ancora

$$\dot{\mathbf{s}}(u, v, \mathbf{p}) = J\dot{\mathbf{p}}.$$

Anche per superfici le matrici M , D e K ed il vettore \mathbf{f}_p saranno costanti nel tempo. Infine, le equazioni del moto delle DNURBS si semplificano in

$$M\ddot{\mathbf{p}} + D\dot{\mathbf{p}} + K\mathbf{p} = \mathbf{f}_p. \quad (13)$$

Le osservazioni fatte nel caso generale sono qui tutte risolte automaticamente; per la precisione i pesi non sono coordinate lagrangiane e quindi restando costanti nel tempo non potranno diventare negativi, troppo piccoli o troppo grandi; ancora le matrici M e D risultano simmetriche, a banda e definite positive, numericamente sono meglio condizionate, sono di dimensione inferiore, meno costose dal punto di vista computazionale e soprattutto non essendo variabili nel tempo, non devono essere ricalcolate ad ogni istante temporale.

Per quel che riguarda la matrice K di rigidità sarà ancora singolare. Si ricorda che gli elementi di rigidità $k_{i,j}$ sono determinati dalla funzione di tensione $\alpha(u)$ (stretching), dalla funzione di rigidità $\beta(u)$ (bending) e dalle coppie di funzioni $R_{i,m}(u)$ ed $R_{j,m}(u)$ come segue

$$k_{i,j} = \int_u \left(\alpha(u) R'_{i,m}(u) R'_{j,m}(u) + \beta(u) R''_{i,m}(u) R''_{j,m}(u) \right) du,$$

da cui banalmente si vede che la somma degli elementi di ogni riga (o colonna) è nulla; infatti

$$\sum_j k_{i,j} = \int_u \left(\alpha(u) R'_{i,m}(u) \sum_j R'_{j,m}(u) + \beta(u) R''_{i,m}(u) \sum_j R''_{j,m}(u) \right) du$$

ma per la proprietà della partizione dell'unità ($\sum_j R_{j,m}(u) = 1$) sarà

$$\sum_j R'_{j,m}(u) = \sum_j R''_{j,m}(u) = 0$$

da cui l'intera espressione diventa nulla.

7 Vincoli lineari

Per includere vincoli lineari nelle DNURBS si devono ridurre le matrici e i vettori nella (13) ad un numero minimo di coordinate lagrangiane non vincolate o indipendenti. Generalmente N vincoli lineari si possono esprimere nella forma

$$\mathbf{c}(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (14)$$

dove A è la matrice dei coefficienti di dimensione $N \times 2(m+k)$ per curve ($N \times 3(m+k)(n+h)$ per superfici). Se la (14) è un sistema lineare sottodeterminato (numero di equazioni inferiore al numero di incognite) allora si possono eliminare delle variabili per esprimere il vettore delle coordinate generalizzate \mathbf{p} come

$$\mathbf{p} = G\mathbf{q} + \mathbf{q}_0$$

dove \mathbf{q} è il nuovo vettore delle coordinate generalizzate di dimensione $2(m+k) - N$, \mathbf{q}_0 vettore costante di dimensione $2(m+k)$ e G matrice di dimensione $2(m+k) \times (m+k - N)$. La matrice G e il vettore \mathbf{q}_0 possono essere ricavati dal sistema $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ effettuando una fattorizzazione LU di A con pivoting totale. La matrice U così ottenuta può essere suddivisa in due matrici U_1 , triangolare superiore $N \times N$ contenente i coefficienti relativi alle variabili vincolate, e U_2 di dimensione $N \times (2(m+k) - N)$ contenente i coefficienti relativi alle variabili libere o indipendenti. Sarà

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} U_1^{-1}L^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -U_1^{-1}U_2 \\ I \end{pmatrix}.$$

Ora nel modello delle DNURBS con vincoli, il nuovo vettore di dimensione inferiore \mathbf{q} delle coordinate lagrangiane, sostituisce \mathbf{p} . In [1] viene fatto vedere come il sistema di equazioni differenziali diventa

$$M_q\ddot{\mathbf{q}} + D_q\dot{\mathbf{q}} + K_q\mathbf{q} = \mathbf{f}_q + \mathbf{g}_q. \quad (15)$$

con

$$\begin{aligned}
M_{\mathbf{q}} &= G^T M G \\
D_{\mathbf{q}} &= G^T D G \\
K_{\mathbf{q}} &= G^T K G \\
\mathbf{f}_{\mathbf{q}} &= \int_u G^T J^T \mathbf{f}(u, t) du \\
\mathbf{g}_{\mathbf{q}} &= -G^T K \mathbf{q}_0
\end{aligned}$$

8 Implementazione

L'evoluzione delle coordinate lagrangiane delle DNURBS è determinata mediante il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine (13). In generale non si può ottenere una soluzione analitica, ma è possibile ottenere una soluzione numerica delle DNURBS attraverso l'approssimazione con equazioni alle differenze. La soluzione numerica di (13) comporta fondamentalmente due fasi di calcolo.

La prima consiste nella valutazione delle espressioni integrali per le matrici M , D e K e per $\mathbf{f}_{\mathbf{p}}$ numericamente. Si è usata la formula di quadratura di Gauss a 4 punti composita, scegliendo come partizione dell'intervallo la partizione nodale delle NURBS; questo garantisce di calcolare gli integrali esattamente per polinomi a tratti fino a grado 7, ma solo approssimati per razionali come le NURBS. La valutazione delle funzioni $R_{i,m}$ e delle loro derivate prime e seconde negli zeri del polinomio di Legendre di grado 4, è stata effettuata mediante la formula ricorrente per le B-spline e per le B-spline derivate; queste formule sono costose, ma estremamente stabili.

La seconda consiste nell'integrare le equazioni differenziali (13) nel tempo mediante la discretizzazione delle derivate di \mathbf{p} in passi temporali Δt . Lo stato delle DNURBS al tempo $t + \Delta t$ è integrato usando gli stati precedenti ai tempi t e $t - \Delta t$. A seconda dei parametri fisici, (13) può essere un sistema stiff. Si è quindi usato un metodo implicito allo scopo di mantenere la stabilità dello schema di integrazione. Come suggerito in [1] si è fatto uso di differenze all'indietro per le derivate discrete di \mathbf{p}

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{p}}^{t+\Delta t} &= \frac{\mathbf{p}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{p}^t + \mathbf{p}^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \\
\dot{\mathbf{p}}^{t+\Delta t} &= \frac{\mathbf{p}^{t+\Delta t} - \mathbf{p}^{t-\Delta t}}{2\Delta t}.
\end{aligned}$$

La formula di integrazione che si ottiene è:

$$(2M + \Delta t D + 2\Delta t^2 K) \mathbf{p}^{t+\Delta t} = 2\Delta t^2 \mathbf{f}_{\mathbf{p}} + 4M \mathbf{p}^t - (2M - \Delta t D) \mathbf{p}^{t-\Delta t}.$$

La soluzione di questo sistema lineare ad ogni istante Δt è effettuata mediante il metodo iterativo dei gradienti coniugati limitando il numero di iterazioni per istante temporale a 10 e la tolleranza fissata a 10^{-3} . Sperimentalmente abbiamo trovato che sono sufficienti 4-5 iterazioni affinché l'algoritmo converga alla tolleranza fissata.

Nel caso di DNURBS con vincoli lineari si discretizzano le derivate di \mathbf{q} (anzichè di \mathbf{p}). Allora la versione discretizzata di (15) è

$$(2M_q + \Delta t D_q + 2\Delta t^2 K_q)\mathbf{q}^{t+\Delta t} = 2\Delta t^2(\mathbf{f}_q + \mathbf{g}_q) + 4M_q\mathbf{q}^t - (2M_q - \Delta t D_q)\mathbf{q}^{t-\Delta t}.$$

Utilizzando la particolare forma della matrice jacobiana \mathbf{J} è possibile effettuare una considerevole semplificazione del sistema lineare separando le variabili x e y (e z nel caso di curve 3D e superfici). In pratica si risolvono due (o tre) sistemi lineari, uno per ogni variabile.

Il software che implementa il modello delle DNURBS è stato realizzato in C++ ed è stato testato su una macchina Sun SPARC Classic. Per compilare il codice sorgente è richiesta almeno la versione 2.7.2.1 del g++ (il compilatore C++ della GNU). Gli eseguibili generati sono due, uno per curve 2D/3D e uno per superfici; sono stati pensati per essere solo motori numerici, cioè non comprendono un tool per la visualizzazione grafica. In input prevedono un particolare file in formato ASCII, chiamato *dnurbs.bin*. Tale file deve contenere tutti i dati di una curva/superficie con i relativi parametri fisici e i vincoli. In output viene generato un file ASCII denominato *dnurbs.dat* contenente le coordinate dei control point delle curve/superfici generate dal moto di questi ultimi. La fase di modellazione e rappresentazione grafica delle curve e superfici DNURBS è effettuato mediante il sistema prototipo XCMODEL, realizzato presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, e basato interamente su NURBS.

9 Modello geometrico e modello fisico: alcuni punti deboli

In questa sezione si vuole analizzare la proposta semplificata al fine di valutare le DNURBS per la simulazione di processi dinamici. In particolare il nostro studio si è soffermato su alcuni aspetti geometrici tipici delle NURBS e sulle ripercussioni che potrebbero avere sul modello fisico. I casi di seguito

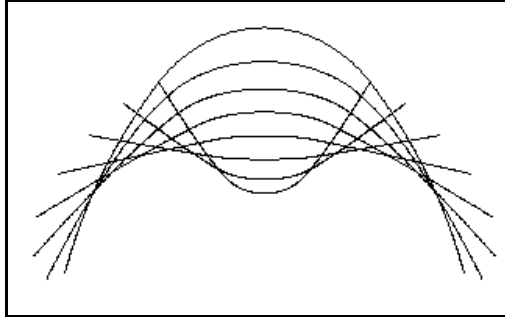


Figure 1: Curva di grado 2 originale

riportati sono sicuramente dei punti deboli per le DNURBS, che limitano sicuramente la loro applicabilità per una risposta dinamica realistica. Per semplicità di esposizione i casi individuati sono riportati per curve, anche se gli stessi punti deboli sono presenti anche per superfici e potrebbero essere messi in evidenza da analoghi esempi test.

9.1 Rappresentazione

Il modello fisico DNURBS viene applicato ad un oggetto descritto geometricamente da una curva NURBS espressa come combinazione lineare di funzioni di forma. Le funzioni di forma rappresentano un insieme di deformazioni base del nostro oggetto che potrà quindi deformarsi se sottoposto a forze ed energie, ma limitatamente ad uno spazio di forme di dimensione finita. Risulta quindi ovvio che a partire da una stessa curva rappresentata in spazi differenti si arriverà a differenti risultati e che in generale, maggiori saranno le funzioni di forma e migliore, anche se più costosa, sarà la risposta del sistema.

Geometricamente è noto che esistono più tecniche per avere differenti rappresentazioni di una stessa curva; in questa sezione parleremo delle tecniche di knot-insertion e degree-elevation che non alterano la parametrizzazione della curva, mentre lasceremo ad una prossima sezione le tecniche di riparametrizzazione. Il nostro obiettivo è analizzare, su un esempio test, il comportamento del modello DNURBS applicato ad una curva diversamente rappresentata per knot-insertion e degree-elevation.

Si considera la curva di grado 2, nodi $(0,0,0,0.366,0.634,1,1,1)$, punti di

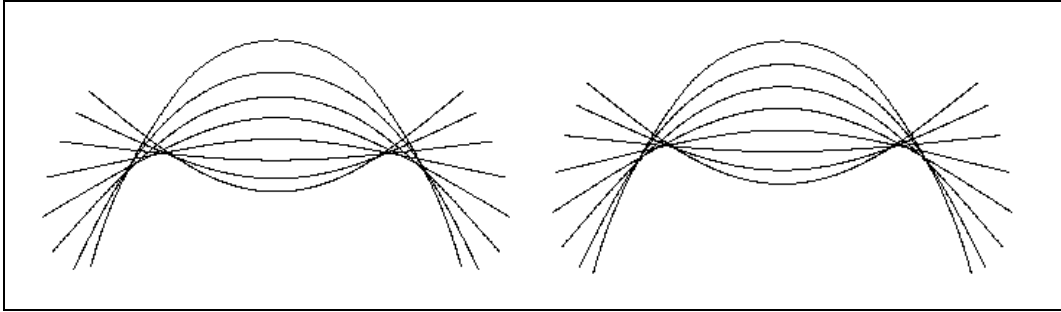


Figure 2: A sinistra curva ottenuta per knot-insertion, a destra per degree-elevation; le curve iniziali sono le prime dall'alto

controllo $(0.3,0)$, $(0.26,0.15)$, $(0,0.5)$, $(-0.26,0.15)$, $(-0.3,0)$ e pesi $(1,1,1,1,1)$ (prima curva dall'alto in Fig.1); tale curva ha cinque funzioni di forma. Si rappresenta la stessa curva per knot-insertion inserendo i nodi 0.1 , 0.2 , 0.45 , 0.55 , 0.8 , 0.9 e per degree elevation aumentando di 2 il grado; si otterranno due rappresentazioni differenti, ma con lo stesso numero di funzioni di forma e cioè 10 . Si applichi a queste il modello fisico con $\mu(u) = 12$, $\gamma(u) = 4$, $\alpha(u) = 2$, $\beta(u) = 1$, $\mathbf{f}_p^T = (0,0)$, velocità iniziale nulla. In Fig.2 sono riportate le curve ottenute agli istanti temporali $i\Delta t$ per $i = 0, \dots, 7$ e $\Delta t = 0.05$. Osservando attentamente si possono notare anche visivamente le differenti risposte del sistema.

In Fig.1 si può osservare l'applicazione degli stessi parametri fisici alla curva originale e notare come tali parametri sono meno influenti se la curva è rappresentata da meno funzioni di forma e comunque come influiscono diversamente.

Quindi, una difficoltà inerente nel simulare un processo dinamico è scegliere una opportuna rappresentazione, in termini di numero e tipo di funzioni di forma, per l'oggetto in questione.

9.2 Vincoli geometrici e meccanici

La sezione 7 "Vincoli lineari", è introdotta in [1] col titolo "Vincoli geometrici". In questa sezione si vuole distinguere e chiarire tra vincolo geometrico, da noi inteso come un vincolo sulle possibili deformazioni geometriche dell'oggetto, e vincolo meccanico che oltre a limitare le posizioni che l'oggetto può assumere ne altera la struttura o meglio la distribuzione di massa. Questa

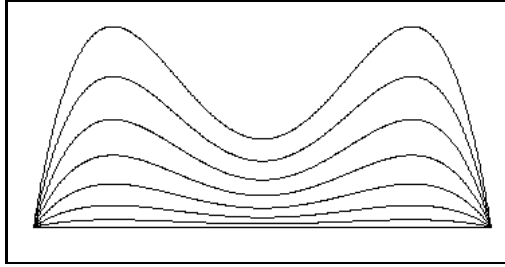


Figure 3: Vincoli meccanici

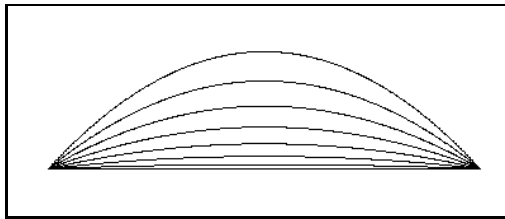


Figure 4: Vincoli geometrici

distinzione nasce dall'interpretazione del seguente esempio. Si considera una sbarretta in posizione orizzontale, rappresentata geometricamente da un segmento rettilineo di curva di grado 4 con 5 punti di controllo allineati ed equidistanti di cui si vincolano gli estremi a restare fermi e pesi tutti uguali. Si considera una funzione densità di massa $\mu(u) = 70$, dissipazione ed energia potenziale nulle, ed una forza verticale $\mathbf{f}_p^T = (0, 70)$. Mentre ci si aspetta che i 3 punti di controllo centrali si muovano verso l'alto con la stessa accelerazione, in realtà quello di mezzo risulta avere un'accelerazione minore spostandosi così più lentamente.

In Fig.3 si può osservare la sbarretta che si deforma come se avesse la parte centrale di massa maggiore. Questo fenomeno sarebbe spiegato se la massa del punto di controllo centrale fosse diversa da quella degli altri, ma la massa è stata distribuita uniformemente. Il problema è da individuare nel vincolo che non è geometrico, ma meccanico, infatti si ricorda che viene assegnata una funzione densità di massa $\mu(u)$ per unità di lunghezza del dominio parametrico e che da questa viene determinata la massa da attribuire

alla curva come

$$\int_u \mu(u) \mathbf{c}(u) du = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i \int_u \mu(u) R_{i,m}(u) du = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i \mu_i$$

dove con μ_i si intende il contributo di massa generalizzata associato al punto di controllo \mathbf{p}_i . Nell'esempio in questione tutti i μ_i sono uguali. Si ricorda che

$$M = \int_u \mu(u) J^T J du = \{m_{i,j}\}$$

ed

$$m_{i,j} = \int_u \mu(u) R_{i,m}(u) R_{j,m}(u) du$$

e che per la proprietà della partizione dell'unità vale sempre

$$\sum_j m_{i,j} = \mu_i \quad \forall i.$$

Applicata la trasformazione $\mathbf{p} = G\mathbf{q} + \mathbf{q}_0$ e quindi $M_q = G^T M G$, la somma degli elementi della riga i -esima di M_q non sarà più μ_i .

Nel caso dell'esempio, M_q altro non è che la matrice 9×9 centrale della M , 15×15 (sono state tagliate le prime ed ultime 3 righe e colonne). Se la somma degli elementi della riga i -esima della M dava la massa totale associata al punto di controllo i -esimo, ora la somma degli elementi della riga i -esima della M_q darà per i tre punti di controllo rimasti differenti valori di massa.

Se i punti estremi fossero vincolati solo geometricamente a stare fermi, la sbarretta sottoposta agli stessi parametri fisici si dovrebbe comportare come in Fig.4.

9.3 Riparametrizzazione

Ogni curva, essendo data in forma parametrica, è rappresentabile in differenti modi per riparametrizzazione. In letteratura ci sono delle proposte di riparametrizzazione di curve NURBS tali che la curva riparametrizzata sia ancora rappresentabile come una NURBS [6], ci sono dei risultati che affermano che le curve razionali, eccetto la linea, non ammettono una parametrizzazione alla lunghezza ad arco [7], ancora per polinomi razionali si può sempre trovare una riparametrizzazione razionale lineare modificando opportunamente e solamente i pesi [4].

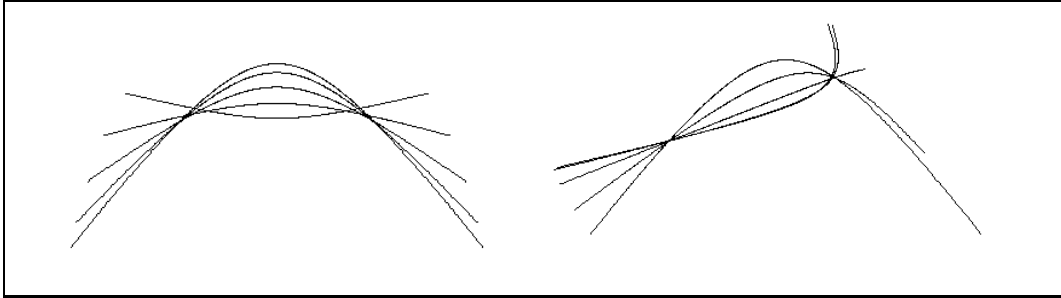


Figure 5: A sinistra curva iniziale, a destra riparametrizzata

La riparametrizzazione, oltre a fornire una differente rappresentazione della curva, in termini di funzioni di forma, gioca anche sulla distribuzione della massa sulla curva; infatti si ricorda che gli elementi $m_{i,j}$ della matrice M dipendono dalle funzioni di forma e che

$$\sum_j m_{i,j} = \mu_i \quad \forall i.$$

E' chiaro che il modello fisico, che viene applicato al sistema discreto dei punti di controllo, ha ora una differente distribuzione della massa totale e ci sono punti più pesanti e punti più leggeri. Se si applica una $\mathbf{f}(u)$ costante e si simula un moto uniformemente accelerato del nostro oggetto rigido (energia potenziale nulla), si avrà una distribuzione di forze sbilanciate allo stesso modo delle masse del sistema,

$$\int_u \mathbf{c}(u)^T \mathbf{f}(u) du = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i \int_u \mathbf{f}(u)^T R_{i,m}(u) du = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{p}_i \mathbf{f}_{\mathbf{p}_i}^T$$

da cui risulterà che a punti più pesanti sono applicate forze maggiori e a punti più leggeri forze minori così che l'oggetto si muove rigidamente di moto uniformemente accelerato. Se però alle curve differentemente parametrizzate si applica un'energia potenziale non nulla, allora il comportamento è imprevedibile e si può osservare che alcune parti della curva risultano "più pesanti" ed altre "meno".

Questo effetto è ben evidente in Fig.5 dove sono riportate le curve ottenute agli istanti temporali $i\Delta t$ per $i = 0, \dots, 4$ e $\Delta t = 0.01$ a partire (a sinistra) da una curva di grado 2, senza nodi, punti di controllo $(-0.4, -0.2)$, $(0, 3)$, $(0.4, -0.2)$ e pesi $(1, 2.5, 1)$ e (a destra) dalla curva riparametrizzata semplicemente

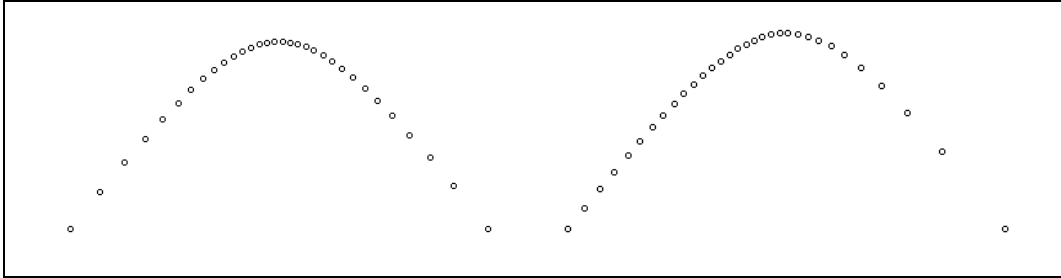


Figure 6: A sinistra curva iniziale, a destra riparametrizzata

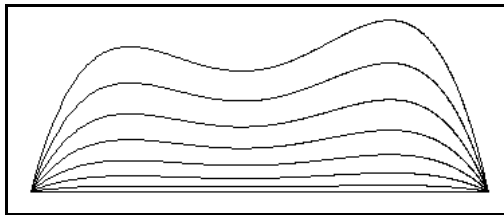


Figure 7: Vincoli meccanici; sbarretta con differente parametrizzazione

prendendo i pesi (4,5,1) e applicando il modello fisico con parametri $\mu(u) = 1$, $\gamma(u) = 0$, $\alpha(u) = 1$, $\beta(u) = 0.5 \mathbf{f}_p^T = (0, 0)$, velocità iniziale nulla.

In Fig.6 sono riportate le curve di partenza a punti per evidenziare la differente parametrizzazione.

Un ulteriore esempio può essere quello della sbarretta usata nella sezione precedente; questa può essere riparametrizzata modificando i pesi in (1, 3, 9, 27, 81); se si applicano gli stessi vincoli meccanici e parametri fisici, la differente distribuzione di massa porta all'effetto di Fig.7, in cui una parte della curva ha massa maggiore.

9.4 Regolarità

E' noto che la regolarità C di una curva NURBS (continuità delle componenti) è legata alla molteplicità dei suoi nodi e che un nodo di molteplicità r implica la regolarità almeno fino alla derivata $m - r - 1$. Questo significa che per opportune scelte dei punti di controllo e dei pesi la curva può risultare più regolare di quanto lo siano le funzioni di forma che la descrivono. Come conseguenza si ha che nel processo dinamico la curva può assumere differente regolarità; questo può essere messo in evidenza con una curva di grado 2 e

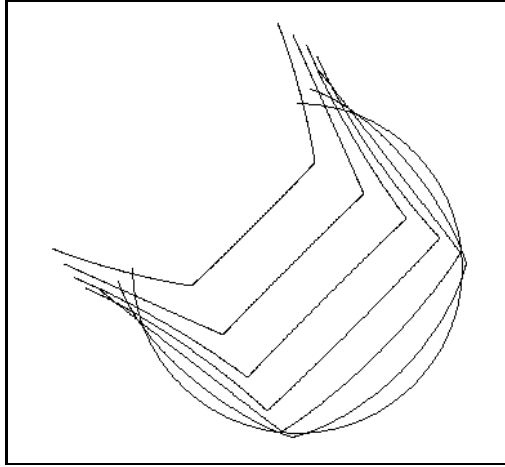


Figure 8: Arco di cerchio NURBS

C^1 , nonostante un nodo di molteplicità 2. Appena i punti di controllo vengono spostati dalla configurazione iniziale la curva presenterà una singolarità nel punto corrispondente al nodo doppio. Questo caso è classico nei cerchi NURBS; nell'esempio di Fig.8 è mostrato un arco di cerchio di 270 gradi costruito con tre archi retti; sono stati applicati i seguenti parametri fisici: $\mu(u) = 20$, $\gamma(u) = 0$, $\alpha(u) = 2$, $\beta(u) = 0.3$ $\mathbf{f}_p^T = (-75, 75)$, velocità iniziale nulla e riportate le curve corrispondenti agli istanti temporali $i\Delta t$ per $i = 0, \dots, 6$ con $\Delta t = 0.05$. Si possono osservare le due singolarità già dal primo istante temporale.

9.5 Curve chiuse e periodiche

Le curve chiuse e periodiche sono molto importanti per rappresentare molti oggetti; si ricorda che geometricamente questo può essere realizzato in differenti modi che però comportano tutti il far coincidere fra loro due o più punti di controllo. Poiché il sistema delle DNURBS agisce sul sistema discreto dei punti di controllo pensandoli come punti materiali di una certa massa, non ha molto senso fisico che alcuni di questi siano coincidenti (compenetrazione delle masse). Ammesso di procedere ugualmente, se non si vincolano esplicitamente questi punti a restare coincidenti nel tempo, il sistema li tratterà come punti differenti e come risultato si avrà una curva che già dal primo istante temporale non sarà più chiusa.

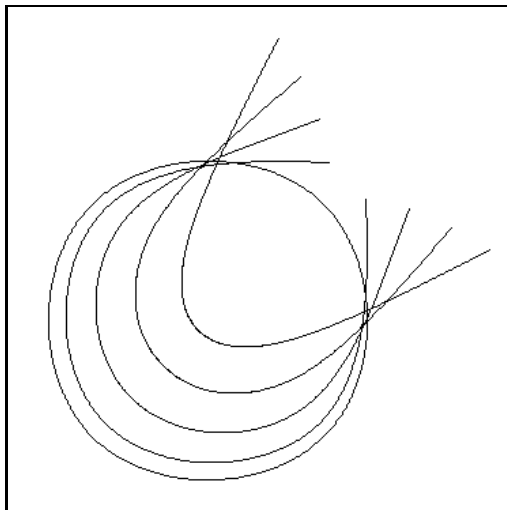


Figure 9: Cerchioide

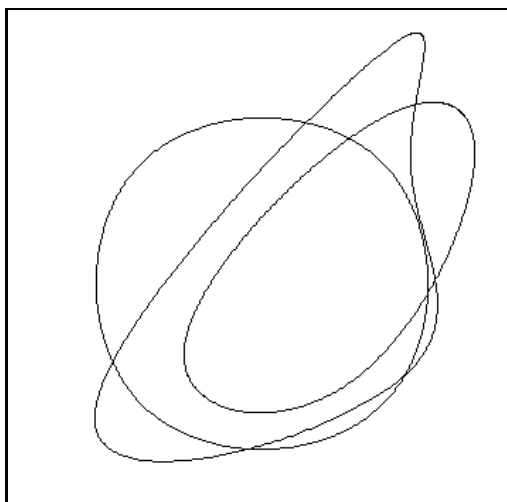


Figure 10: Vincoli meccanici

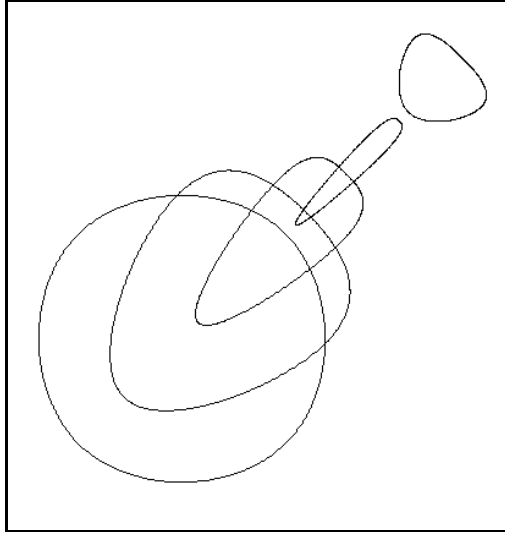


Figure 11: Vincoli geometrici

L'esempio test di Fig.9 mostra proprio questo fenomeno. Si tratta di una curva periodica di grado 3, nodi $(-0.75,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75)$, punti di controllo $(0.3,-0.3)$ $(0.3,0.3)$, $(-0.3,0.3)$, $(-0.3,-0.3)$, $(0.3,-0.3)$, $(0.3,0.3)$, $(-0.3,0.3)$ e pesi tutti uguali. I parametri fisici applicati sono : $\mu(u) = 20$, $\gamma(u) = 0$, $\alpha(u) = 2$, $\beta(u) = 0.3$ $\mathbf{f}_p^T = (75, 75)$, velocità iniziale nulla e $\Delta t = 0.05$. Se quindi si vincolano i punti di controllo si vorrebbe un vincolo geometrico e non meccanico, ma come visto i vincoli possibili nella proposta DNURBS sono meccanici. Questo comporta che i punti di controllo coincidenti, una volta vincolati producano un sistema sbilanciato per massa, ma soprattutto per energia di deformazione interna tale da portare il sistema ad essere, in certi casi, altamente mal condizionato e comunque ad ottenere soluzioni non realistiche. Questo è ben evidente dai primi due passi temporali mostrati in Fig.10

Imponendo dei vincoli geometrici ci si aspetterebbero delle deformazioni tipo quelle mostrate in Fig.11 e cioè che conservino la simmetria iniziale rispetto alla direzione della forza applicata.

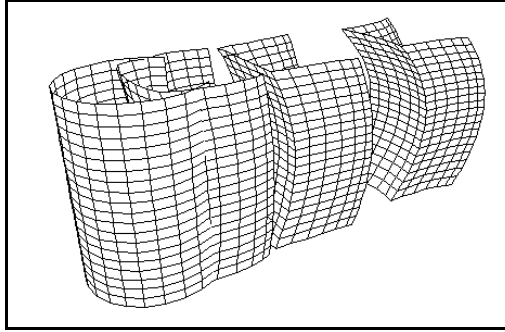


Figure 12: Superfici cilindriche

9.6 Superfici

I punti deboli evidenziati nelle sezioni precedenti e mostrati con esempi di curve sono ancor più evidenti e distruttivi per superfici. In particolare si vogliono richiamare i casi di superfici chiuse e periodiche per la presenza di molti punti di controllo coincidenti e i casi di superfici di rotazione per la presenza di sezioni circolari; queste ultime sono descritte da opportuni punti di controllo e pesi che una volta alterati producono delle curve singolari. Questo si può vedere nell'esempio di Fig.12 dove l'oggetto iniziale è descritto da una superficie cilindrica (rotazione di un segmento rettilineo per $3/4$ di circonferenza) e a cui si sono applicati i seguenti parametri fisici: $\mu(u, v) = 20$, $\gamma(u, v) = 0$, $\alpha_{1,1}(u, v) = 2$, $\alpha_{2,2}(u, v) = 2$, $\beta_{1,1}(u) = 0.3$, $\beta_{1,2}(u) = 0.3$, $\beta_{2,2}(u) = 0.3$, $\mathbf{f}_p^T = (-1000, 1000, 0)$, velocità iniziale nulla e $\Delta t = 0.05$ per tre passi.

10 Conclusioni

In [1] sono state proposte le DNURBS per la modellazione dinamica sculturata interattiva; in questa nota si è voluta esaminare la possibilità di utilizzare le DNURBS per la simulazione realistica di processi dinamici. Si sono individuate delle situazioni in cui sicuramente le DNURBS non possono essere utilizzate positivamente per la simulazione realistica, ma è anche vero che, a meno di queste situazioni, in linea teorica niente impedisce di pensare che possano essere impiegate in pratica. E' nostra intenzione continuare lo studio in atto cercando di ottenere dei risultati sulla qualità di risposta delle

DNURBS su esempi test reali. Dallo studio emergono anche problemi di condizionamento e stabilità numerica oltre all'elevato costo computazionale che non permette sicuramente un approccio interattivo. E' anche allo studio una serie di proposte alternative ad alcuni punti deboli delle DNURBS, come per esempio i vincoli geometrici e la scelta di altri modelli per l'energia potenziale e quindi l'individuazione di matrici di rigidità idonee a simulare differenti materiali.

Riferimenti

- [1]D.Terzopoulos, H.Qin (1994), Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpting, ACM Transaction on Graphics, vol.13, n.2.
- [2]D.Terzopoulos, H.Qin (1995), Dynamic NURBS swung surfaces for physics-base shape design, Computer Aided Design, vol.27, n.2.
- [3]W.C.Hurty, M.F.Rubinstein, Dynamics of structures, Prentice Hall, 1964.
- [4]G.Farin, Curves and Surfaces for CAGD, A practical guide, third edition, Academic Press, 1993.
- [5]L.Piegl, W.Tiller, The NURBS book, Springer, 1995.
- [6]G.Casciola, S.Morigi, Reparametrization of NURBS curves, International Journal of Shape Modeling, Vol.2 No. 2&3 (1996).
- [7]R.T.Farouki, T.Sakkalis, Real rational curves are not 'unit speed', Computer Aided Geometric Design, 8 (1991).
- [8]G.Celniker, D.Gossard, Deformable curve and surface finite-elements for free form shape design, Computer Graphics, 25, 4 (1991).
- [9]W.Welch, A.Witkin, Variational surface modeling, Computer Graphics, 26, 2 (1992)
- [10]E.Viola, Fondamenti di analisi matriciale delle strutture, Pitagora Editrice Bologna (1996)