ALGEBRE DI LIE CLASSICHE

1. Definizioni e basi

Sia F un campo algebricamente chiuso a caratteristica 0 e $n > 1$. Fissiamo un po' di notazione sulle matrici. Per ogni $i, j \leq n$ denotiamo con $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ il cui unico coefficiente non nullo compare in posizione i, j ed è uguale a 1. Sia $\mathfrak{gl}(n, F)$ l'algebra di Lie costituita dalle matrici $n \times n$ con prodotto dato da $[x, y] = xy - yx$. L'algebra si Lie $\mathfrak{gl}(n, F)$ ha chiaramente dimensione n^2 ed una sua base è data da $\{E_{i,j} : i, j = 1, \ldots, n\}$. Considereremo le seguenti algebre di Lie lineari contenute in $\mathfrak{gl}(n, F)$.

1.1. **Tipo A.** L'algebra di Lie *speciale lineare* è data da

$$\mathfrak{sl}(n, F) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, F) : \operatorname{tr}(x) = 0\}.$$

Si ha chiaramente $\dim \mathfrak{sl}(n, F) = n^2 - 1$. Una base è data da

$$\{E_{i,i} - E_{i+1,i+1},\ i = 1, \ldots, n-1\} \bigcup \{E_{i,j} : i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Pper ogni $m \geq 1$ poniamo $A_m = \mathfrak{sl}(m+1, F)$.

1.2. **Algebre di Lie associate ad una forma bilineare.** Sia $f : F^n \times F^n \to F$ una forma bilineare non degenere. L'algebra di Lie associata ad f è data da

$$L_f = \{x \in \mathfrak{gl}(n, F) : f(x(v), w) + f(v, x(w)) = 0 \text{ per ogni } v, w \in F^n\}.$$

Lasciamo al lettore la verifica che L_f sia una algebra di Lie. (Osserviamo che non occorre l'ipotesi f non degenere affinché L_f sia un'algebra di Lie.) In termini matriciali, se s è la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica abbiamo che

$$L_f = \{x \in \mathfrak{gl}(n, F) : x^t s + sx = 0\}.$$

Questo deriva direttamente dal fatto che $f(v, w) = v^t s w$, dove i vettori v e w vengono pensati come vettori colonna. Diciamo che una base ordinata di F^n $(v_1, \ldots, v_n)$ è f-compatibile se

$$f(v_i, v_j) = f(e_i, e_j)$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, dove $e_1, \ldots, e_n$ indica la base canonica di F^n. Se $v_1, \ldots, v_n \in F^n$ e P è la matrice le cui colonne sono formate dai vettori $v_1, \ldots, v_n$, possiamo dedurre che $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base f-compatibile se e solo se P è invertibile e $P^t s P = s$. In questo caso diciamo anche che P è f-compatibile.

Lemma 1.1. *Sia P una matrice invertibile. L'applicazione $x \mapsto P^{-1}xP$ stabilisce un automorfismo di $\mathfrak{gl}(n, F)$ e di $\mathfrak{sl}(n, F)$. Inoltre, se f è una forma bilineare non degenere e P è una matrice f-compatibile allora la stessa applicazione stabilisce un automorfismo di L_f.*

Proof. La prima parte è una semplice verifica. Riguardo la seconda, se P è f-compatibile abbiamo $(P^{-1})^t = sPs^{-1}$ e $sP^{-1} = P^t s$. Sia quindi $x \in L_f$ cioè tale che $x^t s + sx = 0$. Dobbiamo verificare che $P^{-1}xP \in L_f$. Si ha

$$\begin{aligned}(P^{-1}xP)^t s + s(P^{-1}xP) &= P^t x^t (P^{-1})^t s + sP^{-1}xP \\ &= P^t x^t sPs^{-1}s + P^t sxP \\ &= 0\end{aligned}$$

in quanto $x^t s + sx = 0$. □

È vero anche il viceversa della seconda parte di questo lemma, ma non ne avremo bisogno. Si ha cioè che se P è una matrice invertibile tale che $x \mapsto P^{-1}xP$ stabilisce un automorfismo di L_f allora P è f-compatibile.

Remark. Vogliamo ora osservare che se f, f' sono due forme bilineari congruenti allora le algebre di Lie L_f ed $L_{f'}$ sono isomorfe. Infatti, siano s, s' le rispettive matrici associate rispetto alla base canonica. Per definizione di congruenza sappiamo che esiste una matrice invertibile P tale che $P^t sP = s'$ ed è una semplice verifica il fatto che $x \mapsto P^{-1}xP$ stabilisce un isomorfismo tra L_f ed $L_{f'}$.

1.3. **Tipo B e D.** Se f è una forma bilineare simmetrica non degenere; l'algebra di Lie *ortogonale* è data da

$$\mathfrak{o}(n, F) = L_f.$$

Per l'osservazione precedente sappiamo che la classe di isomorfismo di $\mathfrak{o}(n, F)$ è ben definita grazie al teorema di Sylvester. Scegliamo la forma f la cui matrice associata rispetto alla base canonica sia

$$J = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix},$$

la matrice i cui coefficienti sono 1 sull'antidiagonale e 0 altrove. Abbiamo quindi che gli elementi di $\mathfrak{o}(n, F)$ sono le matrici che soddisfano $x^t J = -Jx$ o anche $Jx^t J = -x$, essendo $J^2 = I$. Ma ci si rende facilmente conto che la matrice $Jx^t J$ si ottiene da x facendone la "trasposta" rispetto all'antidiagonale: chiamiamo questa matrice la *riflessa* di x e la denotiamo con x^r. Abbiamo quindi

$$\mathfrak{o}(n, F) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, F) : \, x^r = -x\}.$$

Per $i = 1, \ldots, n$ poniamo $i^* = n+1-i$. Osservando che $E^r_{i,j} = E_{j^*,i^*}$, che $i+j \leq n$ se e solamente se $i^* + j^* \geq n+2$ e che $i^* = j$ se $i + j = n+1$ deduciamo che una base di $\mathfrak{o}(n, F)$ è data dalle matrici del tipo $B_{i,j} = E_{i,j} - E_{j^*,i^*}$, $i, j = 1, \ldots, n$ tali che $i + j \leq n$. Si ha quindi $\dim \mathfrak{o}(n, F) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Per ogni $m > 0$ poniamo $B_m = \mathfrak{o}(2m+1, F)$ e $D_m = \mathfrak{o}(2m, F)$.

1.4. **Tipo C.** Se $n = 2m$ è pari e f è una forma bilineare antisimmetrica non degenere, l'algebra di Lie *simplettica* è data da

$$\mathfrak{sp}(n, F) = L_f.$$

Ancora una volta la classe di isomorfismo di $\mathfrak{sp}(n, F)$ non dipende dalla forma scelta. Scegliamo in questo caso la forma associata alla matrice definita a blocchi

$K = \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix}$. In questo caso la forma delle matrici di $\mathfrak{sp}(n, F)$ si esprime bene decomponendole in blocchi $m \times m$:

$$\mathfrak{sp}(n, F) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : A^r = -D,\, B = B^r,\, C = C^r \right\}.$$

Una base in questo caso è data quindi da $B_{i,j}$ con $i, j \leq m$ e da $C_{i,j} = E_{i,j} + E_{j^*,i^*}$ con $i + j \leq 2m + 1$, e almeno uno tra i e j è maggiore di m. La dimensione di $\mathfrak{sp}(n, F)$ è quindi $m^2 + 2(1 + 2 + \cdots + m) = 2m^2 + m$. In questo caso poniamo, per ogni $m > 0$, $C_m = \mathfrak{sp}(2m, F)$.

Le algebre di Lie classiche sono le algebre di Lie di A_m, B_m, C_m, D_m.

2. Semisemplicità delle algebre di Lie classiche

Osserviamo che le algebre di Lie classiche sono tutte contenute in $\mathfrak{sl}(n, F)$. Abbiamo il seguente criterio:

Proposition 2.1. *Sia L un'algebra di Lie lineare, $L \subset \mathfrak{sl}(n, F)$, tale che F^n sia un L-modulo irriducibile. Allora L è semisemplice.*

Proof. Sia S il radicale di L. Per il teorema di Lie esiste $v \in F^n$, $v \neq 0$, autovettore per tutti gli elementi di S. Esiste quindi $\lambda \in S^*$ tale che

$$s(v) = \lambda(s)v$$

per ogni $s \in S$.

Siccome l'azione di L è irriducibile è possibile trovare una base $v_1, \dots, v_n$ di F^n tale che $v_1 = v$ e per ogni j esiste $x_j \in L$ e $i_j < j$ tale che $v_j = x_j(v_{i_j})$. La scelta può essere fatta imponendo i_j minimo, cioè tale che $x(v_k)$ è combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}$ per ogni $k < i_j$. Abbiamo

$$s(v_j) = s(x_j(v_{i_j})) = [s, x_j](v_{i_j}) + x_j(s(v_{i_j})).$$

Questa formula permette di mostrare per induzione che s agisce in forma triangolare sulla base $v_1, \dots, v_n$ con $\lambda(s)$ sulla diagonale. Siccome gli elementi di L hanno traccia nulla questo ci dice che $\lambda(s) = 0$ per ogni $s \in S$. La stessa formula di prima permette ora di concludere, sempre per induzione, che $s = 0$. □

Proposition 2.2. *Le algebre di Lie classiche sono semisemplici.*

Proof. Sia L un'algebra di Lie classica. Si ha chiaramente $L \subset \mathfrak{sl}(n, F)$ e quindi è sufficiente mostrare che L agisce in modo irriducibile su F^n. Per questo basta mostrare che l'algebra associativa A generata dai suoi elementi insieme alla matrice identità è proprio $M(n, F)$. Si ha $E_{i,i} = \frac{1}{2}(B_{i,i}^2 + B_{i,i})$ per ogni $i \neq m + 1$ se $n = 2m + 1$. Per differenza abbiamo che tutte le matrice diagonali sono in A. A questo punto basta osservare che $E_{i,i}B_{i,j} = E_{i,j}$ e $E_{i,i}C_{i,j} = E_{i,j}$ per concludere. □

3. Sottoalgebre torali

Sia L un'algebra di Lie classica. Diciamo che una sottoalgebra di L è *torale* se è abeliana e costituita da elementi semisemplici. Vedremo più avanti che una sottoalgebra costituita da elementi semisemplici è automaticamente abeliana, ma per ora non ci interessa. Osserviamo intanto che se H è una sottoalgebra torale allora esiste una base di F^n costituita da autovettori comuni a tutti gli elementi di H. La sottoalgebra $H = L \cap \mathfrak{d}(n, F)$ è un esempio di sottoalgebra torale. È chiaro che se H è una sottoalgebra torale, e P è una matrice invertibile tale che $x \mapsto P^{-1}xP$ è un automorfismo di L, allora anche $P^{-1}HP = \{P^{-1}hP : h \in H\}$ è una sottoalgebra torale di L. Vogliamo ora vedere che in questo modo otteniamo *tutte* le sottoalgebre torali (massimali) di L.

Theorem 3.1. *Sia L un'algebra di Lie classica, $H = L \cap \mathfrak{d}(n, F)$ e H' una sottoalgebra torale massimale di L. Allora esiste P invertibile tale $x \mapsto P^{-1}xP$ è un automorfismo di L e $P^{-1}H'P = H$.*

Proof. Se $L = \mathfrak{sl}(n, F)$ l'enunciato è banale: basterà scegliere la matrice P in modo che le sue colonne siano autovettori comuni agli elementi di H'. Negli altri casi dobbiamo mostrare che esiste una base di autovettori comuni ad H' che sia f-compatibile, dove f è la forma bilineare coinvolta. Per $\lambda \in (H')^*$ poniamo $V_\lambda = \{v \in F^n : h(v) = \lambda(h)v \text{ per ogni } h \in H'\}$. Sia $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, con $\lambda \neq 0$. Se tale v non esiste allora $H' = 0$ e il risultato segue. Sia ora $w \in V_\mu$. Per ogni $h \in H'$ abbiamo

$$f(h(v), w)) + f(v, h(w)) = 0$$

da cui $(\lambda + \mu)(h)f(v, w) = 0$ per ogni $h \in H'$. Questo ci dice che $f(v, w) = 0$ a meno che $w \in V_{-\lambda}$. Questo ci assicura che $V_{-\lambda} \neq 0$ e più precisamente che $\dim V_\lambda = \dim V_{-\lambda}$, in quanto f è non-degenere. Scegliamo a questo punto una base $v_1, \ldots, v_k$ a piacere di V_λ e definiamo una base di $V_{-\lambda}$ $v_{n-k+1}, \ldots, v_n$ imponendo $f(v_i, v_{n+1-j}) = \delta_{i,j}$. Il risultato adesso segue reiterando questa procedura fino ad arrivare eventualmente a considerare V_0. In questo caso si ha che f è non degenere su V_0 e basterà considerare una qualunque base di V_0 in cui la forma si rappresenti con J o K. □

Se L è un'algebra di Lie classica definiamo $\mathrm{rk}(L)$, il rango di L, come la dimensione di una sua sottoalgebra torale massimale. Abbiamo quindi $\mathrm{rk}(A_m) = \mathrm{rk}(B_m) = \mathrm{rk}(C_m) = \mathrm{rk}(D_m) = m$ per ogni $m > 0$.

4. Sistemi di radici

Se L è un'algebra di Lie classica e H è una sua sottoalgebra torale massimale sappiamo che gli elementi di H ammettono una base comune di autovettori rispetto alla rappresentazione aggiunta, cioè

$$L = \bigoplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$$

dove $L_\alpha = \{x \in L : [h, x] = \alpha(h)x \text{ per ogni } h \in H\}$. Si noti che $H \subset L_0$, ma vedremo che si ha sempre $H = L_0$. L'insieme $\Phi_{L,H} = \{\alpha \in H^* : \alpha \neq 0, L_\alpha \neq 0\}$ si dice *sistema di radici* di L (relative ad H). Possiamo quindi scrivere

$$L = L_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{L,H}} L_\alpha$$

Osserviamo che $\Phi_{L,H}$ è finito e che grazie al risultato precedente se utilizziamo un'altra algebra torale massimale i sistemi di radici dovranno "corrispondere" (o meglio saranno isomorfi in un senso preciso che vedremo più avanti). D'ora in avanti indicheremo con H la sottoalgebra torale massimale $H = L \cap \mathfrak{d}(n, F)$ e scriveremo quindi semplicemente Φ_L anziché $\Phi_{L,H}$.

Poniamo $\varepsilon_i \in H^*$ dato da $\varepsilon_i(\sum a_j E_{j,j}) = a_i$. Osserviamo che i vari ε_i non sono indipendenti: in tipo A abbiamo $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = 0$, mentre nei tipi B, C, D abbiamo $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i^*}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

4.1. **Sistemi di radici di tipo A.** Osserviamo che se $h \in H$ abbiamo

$$[h, E_{i,j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) E_{i,j}.$$

Abbiamo quindi che $\Phi_{A_{n-1}} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j, i, j = 1, \ldots, n\}$. Ponendo $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, n-1$ abbiamo che, se $i \leq j$, $\varepsilon_i - \varepsilon_{j+1} = \alpha_i + \cdots \alpha_j$ e quindi concludiamo che

$$\Phi_{A_{n-1}} = \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_j) : i \leq j\}.$$

L'insieme $\Delta_{A_{n-1}} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ si dice base del sistema di radici $\Phi_{A_{n-1}}$ in quanto ogni elemento di $\Phi_{A_{n-1}}$ si esprime come combinazione lineare a coefficienti tutti non positivi o tutti non negativi di $\Delta_{A_{n-1}}$.

4.2. **Sistemi di radici di tipo B,C,D.** Supponiamo ora di essere in uno dei tipi B,C,D. Osserviamo che

$$[h, E_{j^*,i^*}] = (\varepsilon_{j^*} - \varepsilon_{i^*})(h) E_{j^*,i^*} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) E_{j^*,i^*}.$$

Ne segue che $[h, B_{i,j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) B_{i,j}$ e $[h, C_{i,j}] = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(h) C_{i,j}$ quando questi sono definiti.

Abbiamo quindi che i sistemi di radici sono dati in tipo B e D da

$$\Phi_{\mathfrak{o}(n,F)} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j, i + j \leq n\}$$

e in tipo C da

$$\Phi_{\mathfrak{sp}(n,F)} = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j : i \neq j, i + j \leq n + 1\}.$$

Questa scrittura però può essere ridotta utilizzando esclusivamente gli elementi $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, dove m è tale che $2m = n$ oppure $2m + 1 = n$, come segue.

Poniamo

$$\Phi'_{B_m} = \{\pm\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i \neq j, i, j = 1, \ldots, m\}.$$

$$\Phi'_{C_m} = \{\pm 2\varepsilon_i, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i \neq j, i, j = 1, \ldots, m\}.$$

$$\Phi'_{D_m} = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : i \neq j, i, j = 1, \ldots, m\}.$$

Per dimostrare che $\Phi_L = \Phi'_L$ è sufficiente notare che $|\Phi_L| \leq |\Phi'_L|$ e che $\Phi'_L \subset \Phi_L$. Questa verifica è del tutto elementare e lasciata al lettore.

Vogliamo anche in questo caso determinare delle basi per i sistemi di radici. Nel tipo B possiamo considerare $\Delta_{B_m} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_m\}$ e osservare che ogni elemento di Φ_{B_m} si scrive (in modo unico) come combinazione lineare degli elementi di Δ_{B_m} con coefficienti tutti non negativi o tutti non positivi. Si ha infatti, posto $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, m-1$ e $\alpha_m = \varepsilon_m$

$$\Phi_{B_m} = \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_j) : i \leq j\} \cup \{\pm(\alpha_i + \cdots \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_m) : i < j\}.$$

In tipo C possiamo scegliere $\Delta_{C_m} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, 2\varepsilon_m\}$ e ponendo ancora $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, m-1$ e $\alpha_m = 2\varepsilon_m$ si ha

$$\Phi_{C_m} = \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_j) : i \leq j\} \cup \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{m-1} + \alpha_m) : i \leq j < m\}.$$

Infine in tipo D possiamo scegliere $\Delta_{D_m} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m, \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m\}$ e ponendo in questo caso $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ per $i = 1, \dots, m-1$ e $\alpha_m = \varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m$ abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi_{D_m} = \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_j) : i \leq j < m\} \cup \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_{m-2} + \alpha_m) : i < m\} \\ \cup \{\pm(\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + \cdots + 2\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1} + \alpha_m) : i < j < m\}\end{aligned}$$