ESAME DI PROBABILITÀ E STATISTICA
PROVA SCRITTA
20/11/2007

Cognome						
Nome						
Matricola						

	1	2	3	Σ
Punteggio				

(1) Ad una fiera è possibile giocare al seguente gioco. Pagando 1 Euro vengono estratte 3 carte a caso da una mazzo di 40 carte italiane e si vincono

- 120 Euro se si estraggono 3 carte uguali (ad esempio tre assi o tre fanti);
- 30 Euro se la somma delle carte estratte non supera 6 (e non sono tre assi o tre due, perché in questo caso si vincono 120 Euro).

Determinare la speranza matematica di vincita. Lo possiamo ritenere un gioco equo oppure no?

Soluzione. I modi possibili di estrarre 3 carte da un mazzo di 40 sono $\binom{40}{3} = 9880$. I modi in cui possiamo ottenere 3 assi sono $\binom{4}{3} = 4$. Stesso discorso vale per le altre carte dal due al re e concludiamo che i modi in cui possiamo ottenere 3 carte uguali sono $4 \cdot 10 = 40$. La probabilità di avere 3 carte uguali è quindi $\frac{40}{9880} \cong 0,4\%$

Per avere la somma minore o uguale a 6 (senza avere 3 carte uguali) abbiamo diverse possibilità

(a) Due assi e un 2
(b) Due assi e un 3
(c) Due assi e un 4
(d) Due 2 e un asso
(e) Un asso, un 2 e un 3.

I casi da (1) a (4) si verificano tutti $\binom{4}{2} \cdot 4 = 24$ volte ciascuno. Il caso (5) si presenta $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ volte. Queste combinazioni sono chiaramente escludentisi a vicenda e quindi abbiamo in tutto $24 \cdot 4 + 64 = 160$ combinazioni favorevoli alla vincita di 30 Euro. La speranza matematica è quindi

$$120 \cdot \frac{40}{9880} + 30 \cdot \frac{160}{9880} = 0,97.$$

Puntando 1 euro si ha pertanto un'aspettativa di vincita di 97 centesimi e quindi il gioco si può ritenere equo.

(2) Una fabbrica produce un certo tipo di mattonelle che pesano di media 4990 grammi con uno scarto quadratico medio di 100 grammi. Per pavimentare la nostra cucina abbiamo bisogno di 150 di queste mattonelle. Qual è la probabilità che il peso di queste 150 mattonelle sia superiore a 750 Kg?

Soluzione. La media aritmetica della media campionaria è $\mu_{\bar{X}} = \mu = 4990g$, mentre lo scarto quadratico medio è

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{100}{\sqrt{150}} = 8,165g.$$

Siccome il campione è costituito da $N = 150$ elementi possiamo supporre che la media campionaria si distribuisca normalmente. Il valore 750 Kg corrisponde ad una media di $\frac{750}{150} = 5$ Kg. Il valore standard corrispondente a 5 Kg è

$$\frac{5000 - 4990}{8,165} = 1,22.$$

La probabilità che il peso del nostro campione sia superiore a 750 Kg è pari all'area soggiacente la curva normale standard oltre il punto di ascissa 1,22 ed è quindi pari a 0,5-0,3888=0,1112, cioè di circa l'11%.

(3) Abbiamo a disposizione una moneta e vogliamo capire se si tratta di una moneta truccata oppure no. La lanciamo per 200 volte ottenendo testa il 55% delle volte.

(a) Con che confidenza possiamo affermare che la probabilità che esca testa sia almeno del 51%?
(b) Quante volte dovremmo lanciare la moneta (ottenendo testa sempre il 55% delle volte) per essere confidenti al 95% che la probabilità che esca testa sia almeno del 51%?

Soluzione.

(a) La distribuzione delle proporzioni campionarie si distribuisce normalmente con media uguale a p e scarto quadratico medio $\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$ dove p è la probabilità di successo (nel nostro caso che esca testa). Nel nostro caso approssimiamo la media e lo scarto quadratico medio utilizzando il valore $p = 0,55$, ottenendo media 0,55 e scarto quadratico medio $\sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{200}} = 0,035$. Il nostro valore di riferimento $0,51$ in unità standard vale
$$\frac{0,51 - 0,55}{0,035} \cong -1,14.$$
La confidenza con cui possiamo affermare che la probabilità che esca testa sia almeno del 51% è pari all'area soggiacente la curva normale standard alla destra della retta $x = -1,14$ ed è pertanto $0,5 + 0,3729 = 0,8729 \cong 87\%$.

(b) Per avere confidenza al 95% il nostro valore di riferimento 0,51 deve valere in unità standard non più di -1,65. Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione in N
$$\frac{0,51 - 0,55}{\sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{N}}} \leq -1,65,$$
che ha come soluzione $N \geq 421,14$. Avremo quindi bisogno di almeno 422 lanci.