ESAME DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
28/01/2008

Cognome						
Nome						
Matricola						

	1	2	3	4	5	6	Σ
Punteggio							

(1) Si dispone di una soluzione A di 70 grammi concentrata al 20% e di una soluzione B di 100 grammi concentrata al 5%

(a) Quanto soluto bisogna aggiungere ad A per ottenere una soluzione concentrata al 30%?
In A sono disciolti $0,20 \cdot 70 = 14$ *grammi di soluto. Denotiamo con* x *la quantità di soluto da aggiungere ad A per ottenere una concentrazione al 30%. La concentrazione che ne risulta sarà*

$$\frac{14 + x}{70 + x} = 0,30$$

che ha come soluzione $x = 10$ *grammi.*

(b) Determinare quanta soluzione di tipo A e quanta di tipo B bisogna miscelare per ottenere una soluzione di 90 grammi concentrata al 10%.
Denotiamo con x_A *e con* x_B *i grammi di soluzione di A e di B che andiamo a miscelare. Si hanno le due seguenti condizioni*

$$\begin{cases} x_A + x_B = 90 \\ \frac{0{,}20 x_A + 0{,}05 x_B}{x_A + x_B} = 0,10 \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è $x_A = 30$ *e* $x_B = 60$

(2) Di un triangolo di lati a, b, c e angoli opposti α, β, γ sono noti $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e $b = 30cm$. Determinare la lunghezza del lato c.
Si vuole calcolare $\sin\gamma$ *per poter applicare il teorema dei seni. Si ha*

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta) = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10} \end{aligned}$$

Per il teorema dei seni possiamo quindi concludere che

$$c = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 20 + 15\sqrt{3}$$

(3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \frac{\log x}{\sqrt{e^{x^2-1} - 1}}$$

L'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero, cioè $x > 0$. *L'altra condizione che deve essere soddisfatta è* $e^{x^2-1} - 1 > 0$. *Quest'ultima disequazione ha come soluzione* $x < -1$ *oppure* $x > 1$. *Dovendo essere anche* $x > 0$ *l'insieme di definizione sarà* $x > 1$.

(4) Si consideri la funzione

$$y = xe^{\frac{1}{x-2}}.$$

(a) Determinare l'insieme di definizione;
L'unico problema è dato dal denominatore $x - 2$. *Pertanto l'insieme di definizione è* $x \neq 2$.

(b) Determinare l'insieme di positività;
Essendo l'esponenziale una funzione sempre positiva, la nostra funzione sarà positiva se l'altro fattore lo è, cioè per $x > 0$.

(c) Calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;

$$\lim_{x \to \pm\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} xe^{\frac{1}{x-2}} = +\infty$$

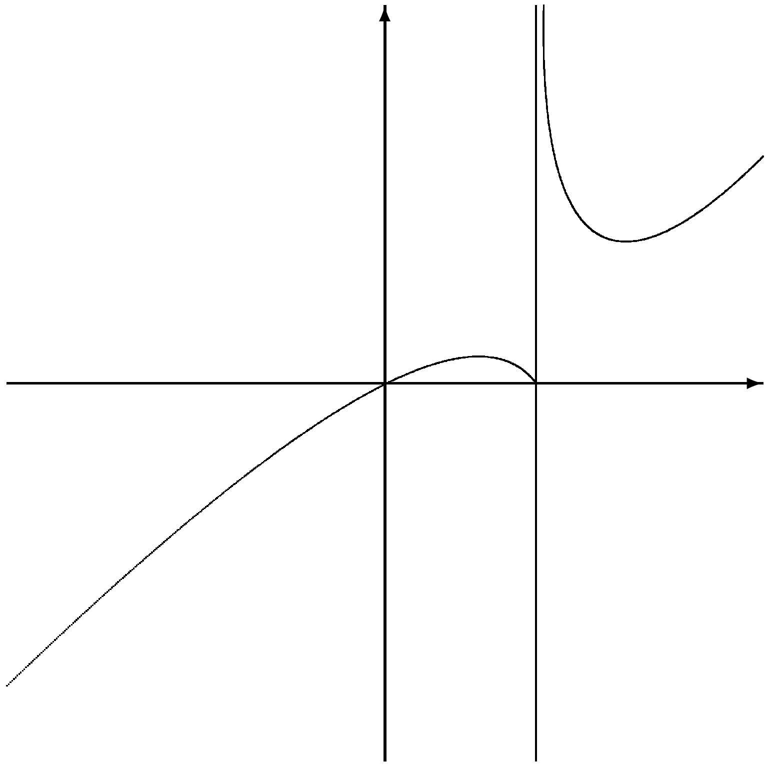
$$\lim_{x \to 2^-} xe^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

(d) Calcolare la derivata prima;
Si ha

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot e^{\frac{1}{x-2}} + xe^{\frac{1}{x-2}} \cdot (-\frac{1}{(x-2)^2}) \\ &= e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

(e) Determinare eventuali massimi e minimi;
Studiamo il segno della derivata prima. Siccome i fattori $e^{\frac{1}{x-2}}$ *e* $(x-2)^2$ *sono sempre positivi, la derivata è positiva quando il fattore* $x^2 - 5x + 4$ *lo è. Concludiamo che la derivata è positiva per valori esterni a 1 e 4 e pertanto tali valori corrispondono rispettivamente ad un massimo e ad un minimo.*

(f) Tracciare il grafico.



(5) Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\, dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)dx &= [2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\sin 0 - 2\sin(-\frac{\pi}{6}) = 0 - 2(-\frac{1}{2}) \\ &= 1\end{aligned}$$

(6) Si determinino media, moda, mediana e scarto quadratico medio della seguente collezione di numeri

$$10, 15, 5, 10, 25, 50, 100, 10, 0$$

Essendo tutti i numeri multipli di 5 possiamo applicare la formula semplificata. Scegliamo anche 30 come media provvisoria. Otteniamo

$$media = 30 + 5\frac{-4-3-5-4-1+4+14-4-6}{9} = 30 + 5(-1) = 25$$

Per ottenere la mediana devo riordinare i numeri: 0, 5, 10, 10, 10, 15, 25, 50, 100. Essendo 9 numeri la mediana sarà il quinto di questa serie, cioè 10.
La moda è il valore che ricorre piu spesso, e quindi è sempre 10.
Per calcolare lo scarto quadratico medio utilizzo la formula semplificata visto che tutti i numeri (e anche la media) sono multipli di 5. Otteniamo

$$SQM = 5\sqrt{\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-5)^2+(-3)^2+0^2+5^2+15^2+(-3)^2+(-5)^2}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{331}$$