

ESAME DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
11/02/2008

Cognome								1	2	3	4	5	6	Σ	
Nome															
Matricola							Punteggio								

- (1) Si dispone di una soluzione A di 90 grammi concentrata al 10%, di una soluzione B di 30 grammi concentrata al 50% e di una concentrazione C di 80 grammi concentrata al 25%, tutte ottenute con lo stesso soluto e lo stesso solvente.

(a) Determinare la concentrazione che si ottiene miscelando le tre soluzioni A, B e C.

Determiniamo le quantità di soluto disciolto nelle soluzioni A, B e C. In A abbiamo $0,10 \cdot 90 = 9$ grammi, in B abbiamo $0,50 \cdot 30 = 15$ grammi e in C abbiamo $0,25 \cdot 80 = 20$ grammi. In tutto si hanno pertanto 44 grammi di soluto determinando una concentrazione pari a $\frac{44}{200} = 22\%$.

(b) Determinare un modo per ottenere una concentrazione di 110 grammi concentrata al 20% utilizzando le tre soluzioni A, B e C.

Ci sono infiniti modi per risolvere questo problema. Guardando pesi e concentrazioni delle soluzioni a disposizione può essere ragionevole provare ad ottenere la soluzione desiderata solo utilizzando le soluzioni A e B. Chiamiamo rispettivamente x_A e x_B le quantità delle soluzioni A e B che andiamo a miscelare. Il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} \frac{0,10x_A + 0,50x_B}{x_A + x_B} = 0,20 \\ x_A + x_B = 110, \end{cases}$$

che ammette come soluzione $x_B = 27,5$ grammi e $x_A = 87,5$ grammi.

- (2) Di un triangolo isoscele sono noti la base $b = \sqrt{26}$ cm e il coseno dell'angolo al vertice $\cos \beta = \frac{12}{13}$. Determinare la lunghezza dei lati obliqui.

(Si ricorda la formula di bisezione $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$.)

Detto α l'angolo alla base si ha

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \left(\frac{\pi - \beta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{26}} \end{aligned}$$

Possiamo quindi calcolare anche $\sin \beta$ utilizzando l'identità fondamentale della trigonometria

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{5}{13}.$$

Utilizzando il teorema dei seni concludiamo che, detta a la lunghezza dei lati obliqui,

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \sin \alpha = \frac{\sqrt{26} \cdot 13 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{26}} = 13 \text{ cm}.$$

- (3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \frac{\log(x^2 - 1)}{\sqrt{e^{x-3} - 1}}$$

L'argomento del logaritmo deve essere positivo. L'argomento della radice deve essere anche positivo trovandosi al denominatore. Abbiamo quindi che l'insieme di definizione è dato dalle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ e^{x-3} - 1 > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha come soluzione $x < -1$ oppure $x > 1$. La seconda disequazione ha come soluzione $x > 3$. Il sistema è verificato quando entrambe le disequazioni sono soddisfatte, cioè per $x > 3$.

- (4) Si consideri la funzione

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}.$$

- (a) Determinare l'insieme di definizione;

L'unico problema è dato dal denominatore che deve essere diverso da zero. L'insieme di definizione è pertanto dato da ogni $x \neq 0, 1$

- (b) Determinare l'insieme di positività;

Il numeratore è sempre positivo. Il denominatore è positivo per valori esterni alle sue radici (che sono 0 e 1). L'insieme di positività è quindi dato da $x < 0$ oppure $x > 1$.

- (c) Calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \lim_{\pm\infty} \frac{x^2(1 + 1/x^2)}{x^2(1 - 1/x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \pm\infty$$

- (d) Calcolare la derivata prima;

Si ha

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2x(x^2 - x) - (x^2 + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} \end{aligned}$$

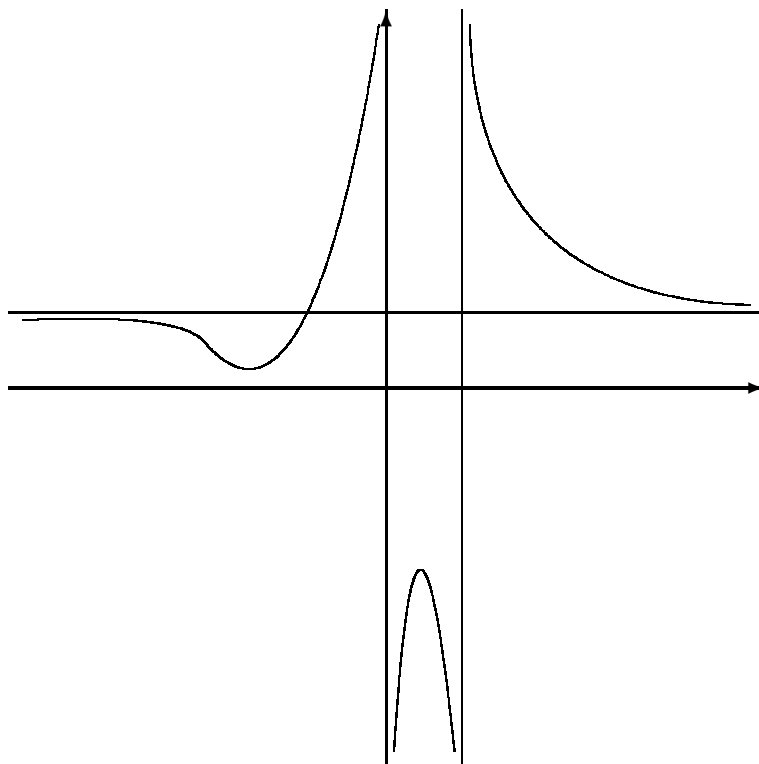
(e) Determinare eventuali massimi e minimi;

Dobbiamo studiare il segno della derivata prima. Il denominatore è sempre positivo e quindi non dà alcun contributo. Il numeratore si annulla per $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Siccome il coefficiente di x^2 del numeratore è negativo la derivata prima è positiva per valori compresi tra le sue soluzioni cioè per $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$. Avremo quindi un minimo per $x_1 = -1 - \sqrt{2} \sim -2,4$ ed un massimo per $x_2 = -1 + \sqrt{2} \sim 0,4$. Determiniamo le rispettive y :

$$y_1 = \frac{x_1^2 + 1}{x_1^2 - x_1} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} \sim 0,8$$

$$y_2 = \frac{x_2^2 + 1}{x_2^2 - x_2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} \sim -4,8$$

(f) Tracciare il grafico.



(5) Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx$$

Abbiamo

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx = \left[\frac{1}{2} \log x \right]_e^{e^2} = \frac{1}{2} \log e^2 - \frac{1}{2} \log e = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

- (6) La media delle votazioni ottenute agli esami di stato in Italia nel 2007 è stata 75 con uno scarto quadratico medio pari a 10. Supponendo che le votazioni si siano distribuite normalmente, determinare la percentuale di studenti che hanno ottenuto una votazione compresa tra 65 e 85.

Dobbiamo determinare i valori delle variabili standard corrispondenti a 64,5 e 85,5, trattandosi di variabili discrete. Si ha $z_1 = \frac{64,5-75}{10} = -1,05$ e $z_2 = \frac{85,5-75}{10} = 1,05$. La percentuale richiesta è data dall'area sotto la curva normale standard tra $-1,05$ e $1,05$ che è pari a due volte l'area tra 0 e $1,05$. Dalla tabella abbiamo che l'area tra 0 e $1,05$ è pari a 0,3531. Concludiamo che la percentuale di studenti che hanno ottenuto una votazione compresa tra 65 e 85 è pari a $2 \cdot 0,3531 = 0,7062 \sim 70\%$.