ESAME DI MATEMATICA
PROVA SCRITTA
11/07/2008

Cognome	
Nome	
Matricola	

	1	2	3	4	5	6	Σ
Punteggio							

(1) Si ha a disposizione una soluzione A di 125 grammi concentrata al 20% e una soluzione B ottenuta disciogliendo 12 grammi di soluto in 188 grammi di solvente.
   (a) Determinare la concentrazione della soluzione B.
   (b) Determinare, se possibile, un metodo per ottenere una soluzione di 140 grammi concentrata al 7% utilizzando le soluzioni A e B.

Soluzione. La concentrazione di B è data da $\frac{12}{12+188} = 6\%$
Chiamiamo x_A *e* x_B *le quantità in grammi delle soluzioni* A *e* B *che andiamo a miscelare. Deve risultare*

$$\begin{cases} x_A + x_B = 140 \\ 20x_A + 6x_B = 7 \cdot 140 \end{cases}$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $x_A = 10$ *e* $x_B = 130$, *che sono compatibili con le quantità che abbiamo a disposizione.*

(2) Sia T un triangolo isoscele con angolo al vertice α e altezza h. Determinare il perimetro sapendo che $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ e $h = 60$ cm. *Soluzione. Sia $\beta = \alpha/2$. Dalle formule di bisezione possiamo ricavare*

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Di conseguenza abbiamo $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Detto a il lato obliquo del triangolo abbiamo quindi

$$a = h/\cos\beta = 75,$$

e detta b la base del triangolo si ha

$$b/2 = a\sin\beta = 75 \cdot \frac{3}{5} = 45.$$

Concludiamo che il perimetro è pari a $2a + b = 150 + 90 = 240$ cm.

(3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \log(x - \sqrt{x-1})$$

L'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x - \sqrt{x-1} > 0$. *Questa è una disequazioni irrazionale che si risolve tramite il sistema*

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 > x - 1 \end{cases}$$

La soluzione delle prime due disequazioni è ovvia mentre la terza è sempre soddisfatta. La soluzione del sistema è quindi $x \geq 1$.

(4) Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_{\pi/12}^{-\pi} \cos(2x - \pi/3)\, dx$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\pi/12}^{-\pi} \cos(2x - \pi/3)\, dx &= \left[\frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})\right]_{\pi/12}^{-\pi} = \frac{1}{2}\left(\sin(2\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) - \sin(-2\pi - \frac{\pi}{3})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(-\frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{3})\right) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \end{aligned}$$

(5) Si consideri la funzione

$$y = (x-3)e^{\frac{x}{x-2}}.$$

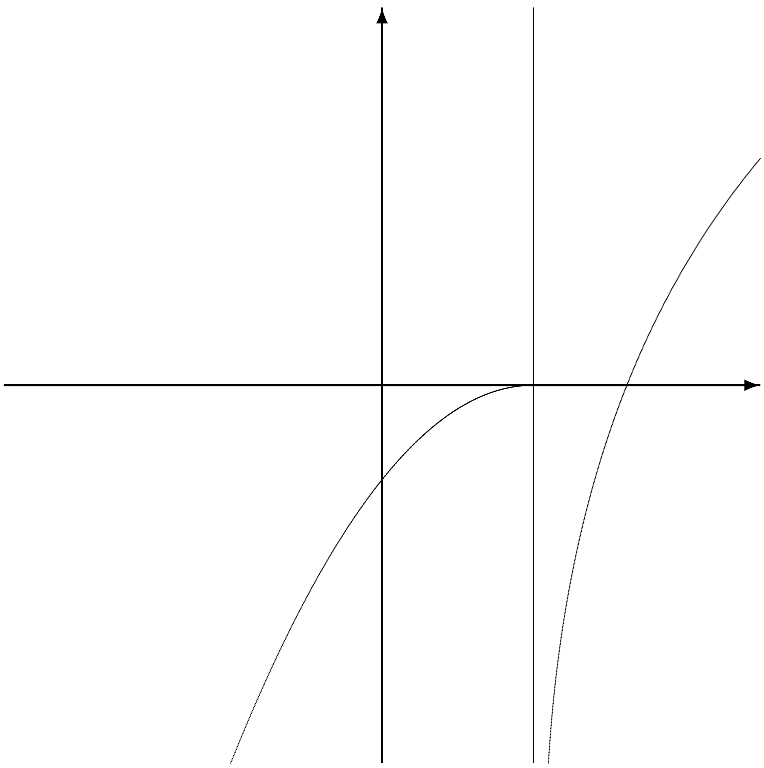
(a) Determinare l'insieme di definizione;
(b) Determinare l'insieme di positività;
(c) Calcolare i limiti agli estremi dell'insieme di definizione;
(d) Calcolare la derivata prima;
(e) Determinare eventuali massimi e minimi;
(f) Tracciare il grafico.

Soluzione.

(a) *I.D.* $x \neq 2$
(b) *I.P.* $x > 3$
(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} (x-3)e^{\frac{x}{x-2}} &= -\infty \\
\lim_{x\to 2^-} (x-3)e^{\frac{x}{x-2}} &= 0 \\
\lim_{x\to +\infty} (x-3)e^{\frac{x}{x-2}} &= +\infty \\
\lim_{x\to -\infty} (x-3)e^{\frac{x}{x-2}} &= -\infty
\end{aligned}$$

(d) $y' = \frac{x^2-6x+10}{(x-2)^2}e^{\frac{x}{x-2}}$.
(e) *La derivata prima è sempre positiva nel suo insieme di definizione e quindi la funzione è sempre crescente e non ha né massimi né minimi.*
(f) .



.

(6) Da un'indagine statistica sulle lauree dell'Università di Bologna, risulta che il voto medio di laurea è pari a 96 con uno scarto quadratico medio di 5. Supponendo che i dati siano distribuiti normalmente, determinare la percentuale di laureati con un voto compreso tra 97 e 102 e la percentuale di laureati con un voto pari almeno a 107.

Soluzione. Bisogna determinare i valori della variabile standardizzata corrispondenti a 96,5 e 102,5 (infatti la variabile è discreta). I valori corrispondenti sono $\frac{96{,}5-96}{5} = 0{,}1$ *e* $\frac{102{,}5-96}{5} = 1{,}3$*. La superficie determinata sulla curva normale è pari a* $0{,}4032 - 0{,}0398 = 0{,}3634$*. Deduciamo che la percentuale dei laureati con voto compreso tra 97 e 102 è del 36,3%. Il valore della variabile standardizzata corrispondente a 106,5 è* $\frac{106{,}5-96}{5} = 2{,}1$*. La superficie determinata sulla curva normale è pari a* $0{,}5000 - 0{,}4821 = 0{,}0179$ *e quindi la percentuale corrispondente è dell'1,8%.*